

Poremećaji matematičkih sposobnosti

(skripta)

Postoje samo 3 vrste ljudi



...oni koji znaju brojati i oni koji ne mogu!

Sadržaj

1.	Uvodno - pojmovi i termini čije razumijevanje je važno za praćenje sadržaja predmeta .	str. 3
1.1.	Matematika	str. 4
1.2.	Termini vezani uz teškoće i odstupanja u matematici te diskalkuliju	str. 8
2.	Određenja (definicije) diskalkulije	str. 10
3.	Učestalost	str. 14
4.	Matematika – rani razvoj i odstupanja	str. 15
4.1.	Intuitivni osjećaj za brojeve	str. 15
4.2.	Usvajanje matematike u predškolskom razdoblju	str. 20
4.2.1.	Pojam broja – brojanje	str. 24
4.2.2.	Početno računanje	str. 29
4.2.3.	Likovi i tijela – uvod u geometriju	str. 31
5.	Matematika u školskoj dobi: uredan razvoj i odstupanja	str. 33
5.1.	Obilježja diskalkulije u školskoj dobi	str. 35
5.2.	Obilježja diskalkulije kod adolescenata i odraslih	str. 39
6.	Mogući razlozi neuspjeha u matematici, odnosno diskalkulije	str. 40
6.1.	Zbunjenost zbog pravca	str. 40
6.2.	Problemi sa slijedom	str. 41
6.3.	Vizualne teškoće	str. 42
6.4.	Prostorna svjesnost	str. 42
6.5.	Radno i kratkoročno pamćenje	str. 43
6.6.	Dugoročno pamćenje	str. 43
6.7.	Brzina izvođenja zadatka	str. 45
6.8.	Rječnik i matematički jezik	str. 45
6.8.1.	Više o matematičkom jeziku	str. 45
6.8.2.	Problemski zadaci	str. 49

6.9.	Kognitivni stil	str. 55
6.10.	Konceptualne sposobnosti	str. 56
6.11.	Anksioznost	str. 56
7.	Postavke o uzrocima diskalkulije	str. 59
7.1.	Genetska osnova	str. 59
7.2.	Neurobiološka osnova	str. 59
7.3.	Okolinski čimbenici	str. 63
8.	Procjena u području matematike	str. 64
9.	Intervencija ili što je moguće činiti kod diskalkulije	str. 67
9.1.	Tretman kod diskalkulije	str. 70

1. Uvodno - pojmovi i termini čije razumijevanje je važno za praćenje sadržaja predmeta

Naziv poremećaji matematičkih sposobnosti u posljednjih se pet godina, na području Hrvatske, uglavnom zamjenjuje terminom diskalkulija (dys – lat. teškoća; grčki calculus – brojati, brojanje) uvažavajući promjene koje u određenju oba termina donose nove znanstvene i stručne spoznaje, ali i prijevodi u uporaba ovog termina koji se koristi u Europi i svijetu.

Uporaba termina diskalkulija proizlazi i iz potrebe za izdvajanjem fenomena koji se odnosi na probleme u matematici u odnosu na druge specifične teškoće učenja ili specifične poremećaje učenja. Specifične teškoće učenja, specifični poremećaj učenja je zajednički termin unutar kojega pripadaju još i disleksija i disgrafija prema klasifikaciji DSM-V (2014). Prema nekim autorima i klasifikacijama iz ranijeg razdoblja (prije 2013; odnosno prije izvornog izdanja DSM-V) u specifične teškoće učenja pripadale su još i dispraksija, posebne jezične teškoće te ADHD/ADD.

Ilustracija 1: Specifični poremećaj učenja



Razumijevanje odstupanja u usvajanju i učenju matematike obuhvaća različite vrste teškoća i problema. Samo neka od dio tih odstupanja udovoljavat će kriterijima za diskalkuliju.

Međutim, obilježja koja pokazuje značajan broj djece koja imaju različite oblike teškoća u matematici, neće se zapravo razlikovati od obilježja koja iskazuju djeca s diskalkulijom: ona će griješiti na vrlo sličan način, imat će nedostatnosti u područjima u kojima ih imaju i djeca s diskalkulijom (npr. radnom pamćenju). Ono što će ih razlikovati jesu mogućnosti primjene intervencije ili tretmana, ali i ishodi tih postupaka.

Da bi se problemi bilo koje vrste razumjeli, potrebno je shvaćati matematiku, njena obilježja, aspekte i mehanizme koji su u pozadini triju važnih procesa:
matematičkog mišljenja, matematičkog znanja i matematičkog jezika.



1.1. Matematika

Matematika (lat. mathematica, grč. matematike = učiti; učenje - učenje matematike – matematika) je kao znanost usmjerena na apstraktne i kvantitativne odnose među čistim veličinama (brojevima), na prostorne (geometrijske) oblike i na pojmovne tvorevine i njihove simbole, a uključuje i kvantitativne operacije i rješavanje kvantitativnih problema u primjeni (prema Hrvatskom enciklopedijskom rječniku, 2002.).

Drugim riječima, matematika je znanost o brojevima, strukturama prostora te njihovim međusobnim vezama i uključuje:

- **aritmetiku**
- **geometriju**
- **algebru.**

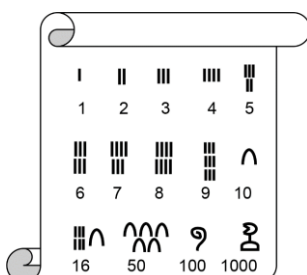
Aritmetika (grč. arithmos: broj; techne: umijeće) je grana matematike koja se bavi brojevima (umijeće računanja) i aritmetičkim operacijama (operacijama s brojevima). Aritmetika se oduvijek nazivala kraljicom matematike i gotovo svi veliki matematičari u povijesti bavili su se njome. Pojam “aritmetika” uveli su Pitagorejci.

Povijest broja i brojanja zadire u predcivilizacijsko razdoblje. Čekrlija (2000) navodi da brojanje započinje kao potreba čovjeka da procijeni npr. veličinu svog stada (ili prikupljenih plodova) pri čemu je mogao uočiti da mu nedostaje npr. jedna ovca pridruživanjem jednog prsta ruke svakoj ovci iz stada. Time čovjek zapravo započinje brojati.

Vežu povijesnog čovjekovog razvoja kao jedinke u odnosu na broj i brojanje možemo promatrati i usporedbom s razvojnim obilježjima i aktivnostima koje djeca iskazuju u ranom djetinjstvu: ona mogu utvrditi npr. da im nedostaje jedna lutka ili jedan medo iz skupa igračaka kojega imaju, posebno ako se kod male djece radi o malim skupovima predmeta do 4. Naime, iako se to povezuje s počecima brojanja, osnova aktivnosti vezanih za brojanje je u potrebi procjene količine – izuzetno važnom aspektu matematike na kojem počivaju temelji matematičke procjene i koja snažno utječe na uspjeh u matematici i mogućnosti svladavanja matematičkih znanja, posebno aritmetičkih. O tom aspektu matematike bit će još govora kasnije.

Prvi znaci za brojeve su bili crteži predmeta ili životinja. Jedan od prvih načina zapisivanja brojeva je onaj koji su uveli Egipćani oko 5000. godina pr.n.e. i kojem je osnova bila deset.

Prikaz 1: Egipatski način zapisivanja brojeva (preuzeto iz Čekrlija, 2000)



Vrijednost tako napisanog broja jednaka je zbroju njegovih pojedinačnih vrijednosti bez obzira na redoslijed znakova. Ovakav način zapisivanja brojeva zasnovan je na zbrajanju i naziva se aditivnim.

Nije neobično ako sličan način označavanja – pomoću crtica čiji broj predstavlja broj predmeta – koriste mala djeca za označavanje npr. broja predmeta, igračaka, slatkiša i sl. koje pospremaju u kutiju, a da bi znala koliko su igračaka stavila u kutiju i kasnije provjere količinu/broj.

Put do današnjeg načina zapisivanja brojeva je bio dug, spor i nimalo jednostavan. U povijesnom prikazu razvoja pojma broja kojega navodi Čakrlija (2000) u Indiji je pronađena kamena ploča iz 595. godine na kojoj je zapisan broj 346 i za koju se smatra da prikazuje prvu poznatu primjenu tzv. dekadskog sistema. Zapisivanje ovakvim načinom u Europu su prenijeli Arapi i zato brojke koje danas koristimo nazivamo arapskim. Arapski matematičar Horezmi i djelo *O indijskom broju* zaslužan je za prihvaćanje dekadskog sustava u Europi.

Prikaz 2: Usvajanje brojeva Čakrlija (2000):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
II	1	2	3	4	5	6	7	8	9
III	1	2	3	4	5	6	7	8	9
IV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VI	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VII	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Broj uključuje i brojku – pisanu oznaku za broj.

Grafomotorička izvedba koja je potrebna za pisan oblik simbola za količinu, odnosno za brojke, neće biti nimalo jednostavna za dio djece koji ovladavaju njihovim pisanjem. Posebno će to biti zahtjevno za djecu koja imaju probleme u motorici, vizualnoj percepciji i prostornoj orijentaciji te ne trebaju čuditi npr. zamjene koje će biti prisutne u zapisivanju kod neke djece - 8 i 3, 6 i 9, ali i oblici poput 8 i 1 i sl.

Problemi vizualne percepcije i prostorne orijentacije značajno mogu utjecati ne samo na pisanje brojki već i na druga područja matematike te posebno rezultate u geometriji.

Geometrija (grč. geo: zemlja, zemaljski; grč. metron: mjera, mjeriti): ova grana matematike bavi se prostornim odnosima i oblicima. U vrijeme stare Grčke (i ranije) odnosila se isključivo na praktična mjerenja zemljišnih posjeda. Naziv je, vjerojatno, izabran zato što su Grci smatrali da su Egipćani otkrili novu disciplinu baveći se problemima mjerenja zemljišta.

Geometrija zahtijeva ne samo razumijevanje prostornih odnosa i oblika već i primjenu ovih znanja kroz baratanje pomagalicama poput šestara, trokuta, ravnala i slično. Djeca s motoričkim nespretnostima (koje su nerijetko prisutne kod disleksije), djeca s problemima vizualne percepcije kao i ona s teškoćama razumijevanja prostornih odnosa, jezičnim teškoćama vezanim uz nerazumijevanje prijedloga -sva ova djeca mogu imati značajne teškoće svladavanju geometrijskih znanja.

Već u počecima usvajanja matematičkih znanja ona mogu iskazivati izrazite teškoće kao što su: neprepoznavanje tijela tj. trodimenzionalnih objekata poput kocke, kugle i slično u dvodimenzionalnom prikazu (na papiru, odnosno u udžbeniku).

Prema kurikulumu za predmet matematika, razumijevanje ovih razlika upravo je početak usvajanja formalnih matematičkih znanja. U tim formalnim počecima, koji se odnose na geometriju, mogu se vidjeti i ona djeca koja će imati teškoća s matematičkim jezikom: tako npr. razlikovanje nazivlja kao što su kvadar i kvadrat, zbog jezične/fonološke sličnosti ovih naziva i zbog prostornih obilježja i razumijevanja prostorne uvjetovanosti razlika među njima, može biti izrazito zahtjevan zadatak za neku djecu i veću u počecima može biti razlog neuspjeha.

Algebra - (arap. al-jabr: sastavljanje, spajanje; skraćeni naziv arapske matematičke knjige Kitab al-jabr we-al muqabalah (u prijevodu - Umijeće računanja nepoznatim veličinama, autor je već spomenuti arapski matematičar Horezmi) je grana matematike koja proučava tzv. algebarske strukture; algebarske operacije (binarne: zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje...; unarne: kao npr. kvadriranje).

Složenost algebarskih zadataka temelji se na razumijevanju i primjeni jednostavnih matematičkih znanja, prije svega aritmetičkih znanja, i podrazumijeva njihovu uporabu na razinu apstrahiranja i poznavanja procedura za izvršenje matematičkih izračuna.

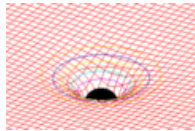
Algebra pripada u kategoriju „složene“ matematike i na razini teškoća zahtijeva procjenu koja se udaljava od tzv. temeljnih znanja te mora imati snažno uporište u razini formalne poduke, odnosno poznavanja kurikulumu, još snažnije nego aritmetika i geometrija.

Premda se matematika kao znanost dijeli na navedene grane - aritmetiku, geometriju i algebru, a u svakoj od njih mogu se javiti teškoće i odstupanja, diskalkulija se najčešće vezuje uz nedostatna aritmetička znanja. U procesu prepoznavanja diskalkulije, pobliže označavanje grana u kojoj osoba ima teškoća, pridonosi daljnjem procesu procjene i njenoj kvaliteti.

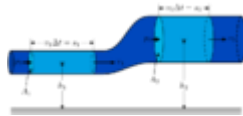
Razna određenja diskalkulije, osim spomenutih grana matematike, uvažavaju još jedan aspekt - **primijenjenu ili svakodnevnu matematiku** na način kako to definiraju Van Luit i sur. (1994) smatrajući da je matematika zapravo šira i obuhvaća i: rješavanje problema pomoću prstiju, mjerenje, vrijeme, novac, kalkulator, interpretaciju grafova, tablica i karata ... Upravo o ovim aktivnostima može se govoriti kao primijenjenoj matematici, onoj koja dokazuje stalne učinke matematike u svakodnevnom životu.

U kategoriji primijenjene matematike, „matematička struka“ će prepoznati područja koja se mogu slikovno prikazati:

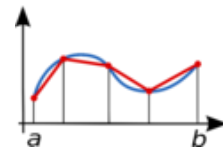
Prikaz 3: (preuzeto s <https://hr.wikipedia.org/wiki/Matematika> studeni 2016):



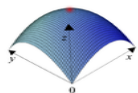
Matematička fizika



Matematička teorija dinamike fluida



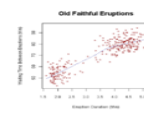
Numerička matematika



Optimizacija



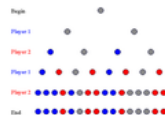
Teorija vjerojatnosti



Statistika



Financijska matematika



Teorija igara

Ovo određenje primijenjene matematike ukazuje na širinu matematike na posve drugačiji način od gledišta Van Luita i suradnika kao i gledišta drugih stručnjaka koji se bave diskalkulijom. Uvažavanje odrednica „strukovne podjele i strukovno određene kategorije primijenjene matematike“ daje mogućnosti da se i u domeni matematičke struke još snažnije govori o ograničenjima koje osobe s diskalkulijom imaju u razumijevanju i primjeni matematike u domeni onoga što nas svakodnevno okružuje i snažno na nas utječe. Stoga je potrebno uvažavati terminologiju koju daje matematička struka, ne zanemarujući osobitosti koje iskazuju stručnjaci za diskalkuliju.

Vrijednost matematike u svakodnevnom životu je neupitna. Prepoznamo je kroz potrebu (ali i probleme) **točnoga određenja** količina, veličina, oblika, procedura, ali i potrebu za posve drugačijim pristupom – pristupu koji se temelji na **procjeni, intuitivnom shvaćanju matematike**. Procjena se u matematici javlja od najranije dobi djeteta do odrasle dobi i predstavlja izuzetno važan dio za ostvarivanje matematičke kompetencije.

Za određenje matematike i diskalkulije potrebno je razdijeliti temeljne kompetencije - one za *procjenu* i one za *točno određenje*.



Ova podjela se temelji na neurološkoj podlozi, odnosno objašnjenjima načina funkcioniranja i mozgovne aktivnosti prilikom izvođenja matematičkih zadataka.

1.2. Termini vezani uz teškoće i odstupanja u matematici te diskalkuliju

Poznato je da se kod neke djece već vrlo rano mogu uočiti nedostatnosti koje prate proces usvajanja brojeva, odnosno brojanja, razumijevanja količina, skupova i druga obilježja, no uobičajeno je da se problemi uoče s počecima formalne poduke, a mogu biti vidljivi kroz cijelo školovanje i do odrasle dobi. Termini kojima se opisuju odstupanja, u literaturi vezanoj uz diskalkuliju i matematičke teškoće, su vrlo različiti:

- Teškoće u matematici
- Specifične teškoće u matematici
- Teškoće učenja matematike
- Matematičke teškoće
- Poremećaj matematičkih sposobnosti
- Specifični poremećaj matematičkih sposobnosti
- Specifični poremećaj matematičkih vještina
- Specifični razvojni poremećaj aritmetičkih vještina
- Akalkulija
- Diskalkulija
- Razvojna diskalkulija
- Poremećaj u usvajanju matematike

Ovi termini prijevod su nazivlja koje dolazi iz literature na engleskom jeziku:

mathematical disabilities, specific mathematic disabilities, dyscalculia, developmental dyscalculia, acalculia, specific learning disabilities, learning disabilities in mathematics, developmental arithmetic disorders, math deficits...

Prema navodima *Dyscalculia Organisation*, (mrežne stranice udruge; pristupljeno u siječnju 2017.; <http://www.dyscalculia.org/dyscalculia>) nazivi koji se još koriste i mogu se pronaći u literaturi su:

(1) *Specific Learning Disability in Mathematics (SLD-Math)*

(2) *Acalculia*

(3) *Gerstmann's syndrom*

(4) *Math Dyslexia*

(5) *Numerical Impairment*

(6) *Number Agnosia.*

Unatrag pet godina, najčešći termini koji se u literaturi navode su:

- *Dyscalculia*
- *Mathematical learning disabilities* (Chinn, 2015)
- *Developmental dyscalculia* (Kaufman, Mazzocco i sur.,2013)
- *Learning disabilities in math.*

Termini koji su posljednjih pet godina u uporabi kod nas su prijevodi nekih od navedenih termina ili inačice oblikovane za potrebe označavanja obilježja funkcioniranja one djece koja nisu uspješno savladavala matematiku (već navedeni prijevodi):

diskalkulija, razvojna diskalkulija, teškoće učenja u matematici, poremećaj u usvajanju matematike.

Novo izdanje i prijevod Priručnika američke psihijatrijske udruge – *American Psychiatric Association- Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders (DSM–V)* objavljen 2013. u SAD, hrvatsko izdanje iz 2014. terminima pridružuje i naziv: **specifični poremećaj učenja** – sa šifrom F.81.2 - **S oštećenjem u matematici** uz napomenu da se kao **alternativni naziv** može koristiti **diskalkulija** „...alternativni izraz koji se koristi za označavanje teškoća karakteriziranih problemima u obradi numeričkih informacija, učenju aritmetičkih činjenica i točnom i fluentnom izvođenju računanja.“ (DSM-V, 2014)

Ono što vezuje termine jest opis obilježja teškoća koji se pojavljuje još od prvih spominjanja specifičnih teškoća i odstupanja u matematici (prema Swanson, Cooney i McNamara, 1991): Bronner još 1917. govori o specifičnome poremećaju koji nekoj djeci uzrokuje teškoće u vezi s razvojem i razumijevanjem brojeva. 1925. Henschen uvodi termin akalkulija da bi se razlikovao poremećaj računanja od poremećaja čitanja i pisanja i govori o nesposobnosti izvođenja jednostavnih matematičkih zadataka i opisuje ponašanja vezana uz mozgovna oštećenja. Guttman (1937) koristi naziv teškoće u aritmetici, a Gerstmann (1940) – diskalkulija - specifična teškoća učenja u pojedinim područjima matematike.

Znanstvenik i stručnjak koji je obilježio istraživanja u domeni termina i određenja problema koji se javljaju u matematici, Ladislav Kosc još 60.-ih godina prošlog stoljeća govori o razvojnoj diskalkuliji, a 1974. (prema Wilson, 2016;

OECD/<http://journal.frontiersin.org/article/10.3389/fpsyg.2013.00516/full>) daje definiciju koju kognitivni neuropsiholozi koriste i danas: diskalkulija predstavlja teškoće u matematici koje su ishod oštećenja onih dijelova mozga koji su uključeni u matematičku obradu, bez da postoje oštećenja općih mentalnih funkcija.

2. Određenja (definicije) diskalkulije

DSM-V (2014) govori o **diskalkuliji** u sklopu već spomenutog specifičnog poremećaja učenja, kao ...“neurorazvojnog poremećaja biološkog porijekla koje je osnova za abnormalnosti na kognitivnoj razini koje su povezane s biheviornalnih znacima ovog poremećaja. Biološko porijeklo uključuje interakciju genetskih, epigenetskih i okolinskih čimbenika, koji utječu na sposobnost mozga da učinkovito i precizno percipira ili obrađuje verbalne i neverbalne informacije.“

Dijagnostički kriteriji uključuju na razini A:

„Teškoće u učenju i korištenju akademskih vještina na koje upućuje prisutnost jednog od sljedećih simptoma koji traju najmanje 6 mjeseci, unatoč intervencijama koje su usmjerene na ove teškoće...“

pri čemu se kao 5. i 6. podkriterij u DSM-V navode:

„5. Teškoće u ovladavanju značenjem broja, numeričkim činjenicama ili računanjem (npr. slabo razumije brojeve, njihovu veličinu i odnose, broji na prste kod zbrajanja jednoznamenastih brojeva umjesto da se sjeti matematičke činjenice kao što to čine vršnjaci, gubi se u sredini aritmetičkog računanja i može zamijeniti postupke).

6. Teškoće s matematičkim zaključivanjem (npr. ima velikih teškoća s primjenom matematičkih pojmova, činjenica ili postupaka pri rješavanju kvantitativnih problema).“

Na kriterijskoj razini B se navodi da su akademske vještine znatno ispod ispod očekivane razine, a na kriterijskoj razini C da teškoće počinju u šk. dobi. Kriterijska razina D navodi tzv. „isključujuće kriterije“ – ove teškoće nisu vezane uz razinu općeg intelektualnog funkcioniranja, uz probleme s vidom ili sluhom kao ni uz druga senzorička oštećenja, ne proizlaze iz nepovoljnih prilika niti iz manjkavosti akademske poduke.

Obilježja teškoća unutar šifre F81.2 treba odrediti na temelju značajki koje prema DSM-V uključuju:

Pojam broja

Pamćenje aritmetičkih činjenica

Točno ili tečno računanje

Točno matematičko zaključivanje.

Određenje koje ne odstupa od kriterija danih u DSM-V, daje jedna od vodećih organizacija koja se na europskom prostoru bavi disleksijom, disgrafijom i diskalkulijom – *British Dyslexia Asssociation (BDA)*; <http://www.bda.org> ; pristupljeno veljača 2016; siječanj 2017) pri čemu se uz određenje koriste dva termina – diskalkulija i razvojna diskalkulija:

Razvojna diskalkulija je specifična teškoća učenja koju obilježavaju problemi u usvajanju temeljnih aritmetičkih vještina, obradi brojevnih veličina i točno i fluentno računanje. Ove teškoće trebaju biti značajno ispod onoga što se očekuje za kronološku dob i nisu posljedica neodgovarajuće poduke niti intelektualnih teškoća.

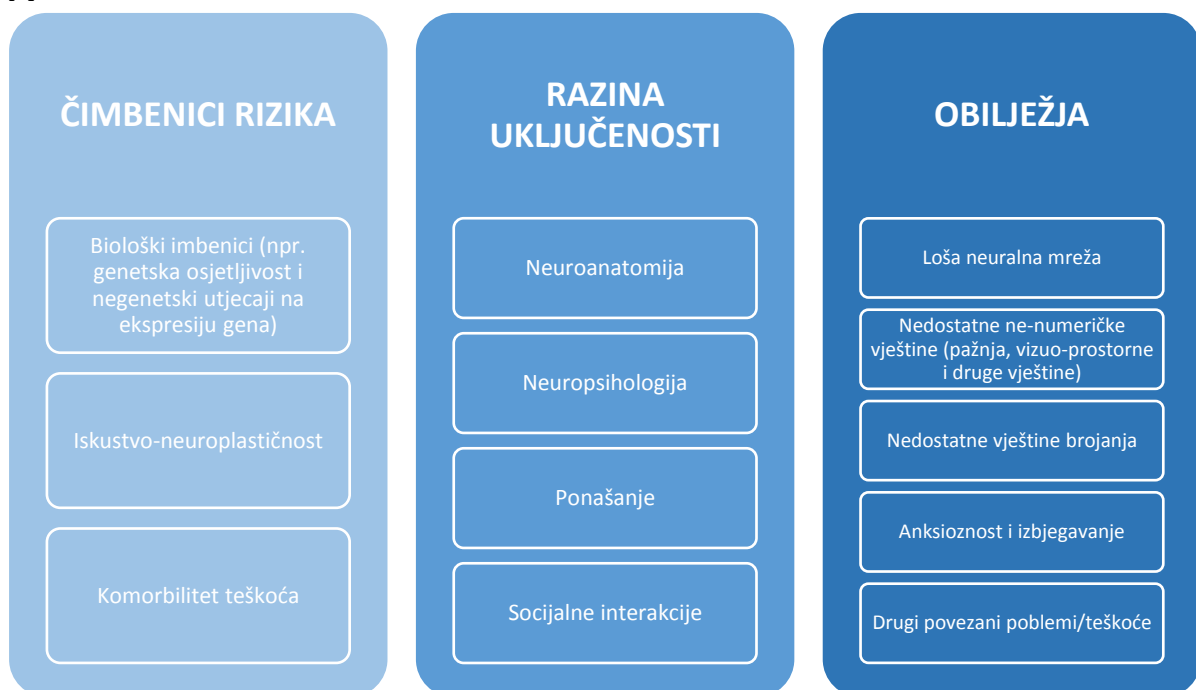
Kaufmann i sur. (2013) definirajući razvojnu diskalkuliju navode da ovaj termin nije sinonim za aritmetičke i matematičke teškoće već da se radi o maloj podgrupi unutar kategorije matematičkih teškoća koja je često „maskirana” i teško ju je odijeliti od ostalih teškoća. Prava razvojna diskalkulija se može promatrati samo ako se znaju individualne razlike u aritmetičkim vještinama u općoj populaciji. Prosječne aritmetičke vještine su vrlo individualno određene (niz je individualnih razlika, kako to navodi i Dowker, 2005) te sadrže niz komponenti (pamćenje, izvršne procedure, razumijevanje, korištenje aritmetičkih principa; Dowker, 2008), a što se mijenja s dobi (sve do odrasle dobi). Upravo stoga se ne može govoriti o jednom suštinskom deficitu (Butterworth, 2005; Kaufmann i sur., 2013).

U prilog izrazitoj heterogenosti razvojne diskalkulije govore i činjenice o različitim utjecajima okoline, školovanja, obilježja brojevnog sustava, socio –emocionalnih čimbenika, o mogućnostima vezanja s drugim specifičnim teškoćama učenja (poput disleksije), s neurorazvojnim problemima, poput poremećaja pažnje i sl.

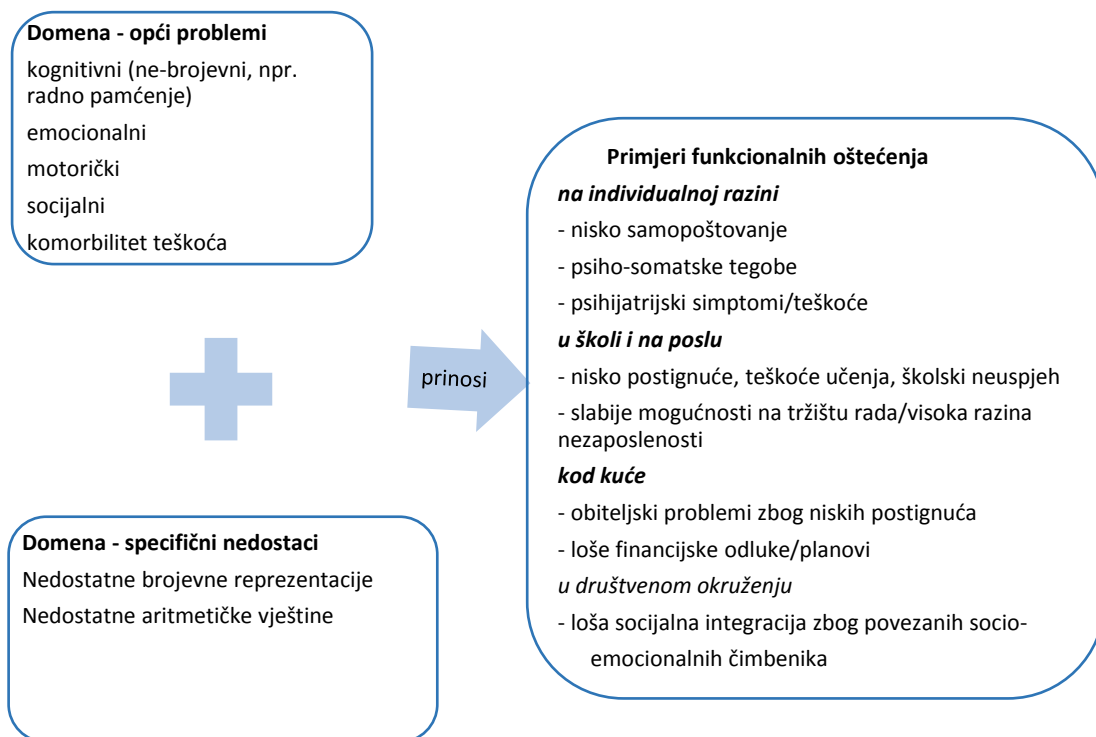
Za razumijevanje razvojne diskalkulije Kaufmann i sur. (2013) daju prikaz (slika 1):

Slika 1. preuzeta iz Kaufmann i sur. 2013. **(A)** Razvojni i cjeloviti pogled na razvojnu diskalkuliju **(B)** Shematski prikaz mogućih kliničkih obilježja razvojne diskalkulije **(C)** Shematski prikaz ključnih područja za daljnja istraživanja i nastojanja usmjerena na razjašnjenje stvarnog razvoja konceptualizacije kod razvojne diskalkulije. Dijelovi koji su označeni sivom u navedenom izvoru nisu bili predmet istraživanja, ali su važna područja za daljnja istraživanja.

A



B



C



International Dyscalculia Association (IDA; <http://www.dyscalculia.org/> pristupljeno veljača 2016) govori o terminima diskalkulija i matematičke teškoće (*Dyscalculia /math disabilities*). Kriteriji koje uvažava IDA definicija su prema DSM-V (IDA navodi izvorno izdanje, 2013) te navode i termin *math learning disabilities* određujući diskalkuliju/matematičke teškoće kao:

- **neurorazvojni poremećaj** *biološkog porijekla koji se očituje u teškoćama učenja i problemima u stjecanju akademskih vještina koje su stoga značajno ispod kronološke dobi. Vidljive su u ranom školskom razdoblju, traju najmanje 6 mjeseci i nisu posljedica intelektualnih teškoća, razvojnih teškoća ili neuroloških i motoričkih teškoća. Matematičke teškoće pripadaju u kategoriju specifičnih teškoća učenja -u neurorazvojne teškoće koje:*
 - ometaju učenje i korištenje temeljnih akademskih vještina (čitanja, pisanja i matematike)
 - su neočekivane te se pojavljuju unatoč urednog razvoja u ostalim područjima
 - uzrokuju odstupanja u akademskim, radnim i svakodnevnim aktivnostima
 - odstupanja su potvrđena u individualno provedenim testiranjima na standardiziranim mjerama i kliničkim testiranjima.

Ovakva stanja su trajna i ostaju prisutna u odrasloj dobi.

Iz pregleda definicija vidljivo je da se osobitosti diskalkulije vežu uz određenje pojedinih aspekata matematike, posebno **aritmetike**. Za određenje diskalkulije, u smislu specifičnog poremećaja učenja u domeni matematike, važno je razumjeti da se problemi mogu javiti ne samo u aritmetici već i u geometriji i algebri (ili samo u jednom od navedenih aspekata), a posebno se mogu opisati problemi koje osobe imaju s tzv. primijenjenom ili svakodnevnom matematikom, u određenju kako ga daju van Luit i sur. (1984).

3. Učestalost

Ono što se definicijom diskalkulije određuje kao obilježja ove specifične teškoće, odnosno specifičnog poremećaja učenja, uvjetuje učestalost – broj djece/osoba „pogođenih“ ovom teškoćom. Podaci o učestalosti prema dobro definiranim epidemiološkim ispitivanjima koja su provedena u **SAD, Europi i Izraelu** (Badian, 1983; Ostad, 1998; Gross-Tsur i sur., 1996; Shalev i sur. 2001) govore o **5 do 8% školske djece koja imaju diskalkuliju**.

Geary (2011) navodi da će 7% djece biti prepoznato prije ulaska u srednju školu kao ona koja imaju problem barem s jednim aspektom matematike. Još 10% djece bit će prepoznato kao ona koja imaju niska postignuća u matematici. Prema istraživanju iz Velike Britanije čak 23% odraslih osoba nema matematičke kompetencije potrebne za mnoge dnevne i rutinske aktivnosti koje zahtijevaju primjenu matematike.

Istraživanja iz Južne Indije govore o 6% djece u školskoj dobi koja imaju diskalkuliju (Ramaa i Gowramma, 2002).

Studija R. Pearda (2010) u kojoj odjeljuje diskalkuliju kao trajnu neurološku teškoću od specifičnih teškoća u matematici (vezanih uz probleme poduke i intervencije) govori o samo 2% djece s ovom neurološkom teškoćom.

Podaci iz nama susjedne Srbije, prema novim istraživanjima Jovanović i sur. (2013), navode učestalost od čak 9,9%, a što je više nego u ostalim studijama.

Nova epidemiološka istraživanja mogu poslužiti usporedbi s navedenim ispitivanjem.

Podaci o **učestalosti diskalkulije u Hrvatskoj nisu poznati**. Razlozi započinju od činjenice da Hrvatska nema svoju tj. službeno prihvaćenu definiciju diskalkulije. Iz načina dijagnosticiranja u sustavu zdravstva, odnosno procjena u smislu davanja nalaza i mišljenja u sustavima odgoja i obrazovanja i socijalne skrbi, te prema stavovima profesionalnih udruga (Hrvatsko logopedsko društvo) i udruga građana koje su zainteresirane za navedenu problematiku (kao npr. jedna od vodećih udruga – Hrvatske udruga za disleksiju) proizlazi uvažavanje kriterija koji su dani u DSM-V. Ovi podaci mogu biti osnova za pokretanje ispitivanja o učestalosti diskalkulije, posebno kad je poznato da je sve veći broj djece koja traže pomoć u matematici (posebno kroz tzv. instrukcije) kao i da je sve veći broj djece s negativnim ocjenama u matematici, te je sve više zahtjeva za prilagodbama na državnoj maturi iz matematike iz razloga postojanja teškoća u matematici ili diskalkulije.

Premda kriteriji DSM-V kao osnovu za postavljanje dijagnoze diskalkulije, baš kao i za druge specifične poremećaje učenja (disleksiju i disgrafiju), navode trajanje simptoma barem šest mjeseci i njihovo postojanje unatoč osiguranoj prilagodbi u poduci tj. intervencijskih postupaka u školskoj dobi, značajke odstupanja moguće je uočiti i mnogo ranije.

Rani znakovi rizika za diskalkuliju mogu se vidjeti u predškolskoj dobi, a za njihovo prepoznavanje potrebno je znati odrednice urednog razvoja.

4. Matematika – rani razvoj i odstupanja

4.1. Intuitivni osjećaj za brojeve

U teorijskim raspravama u kojima se nastoje definirati počeci usvajanja matematike i znaci koje djeca iskazuju vezano uz matematičke kompetencije, nerijetko se spominje urođenost temeljnih kompetencija za količinu (Geary, 2000; Hamson i Hoard, 2000;). Te biološke sposobnosti osiguravaju implicitno razumijevanje broja, odnosno količine, te kasnije kardinalnosti, brojanja i jednostavne aritmetike. Taj *intuitivni osjećaj za brojeve* (**Approximate number system /ANS**) ili mentalni sustav za predočavanje količina koji oblikuje „intuitivni osjećaj za brojeve/količine“ (Mazzocco, Feigenson, Halberda, 2011), modul za brojeve, može se opisati kao sposobnost brzog razumijevanja, procjene i baratanja ne-simboličkim brojevnim količinama (Morsanyi i Szűcs, 2015).

Primjer funkcioniranja ANS-a je mogućnost da odrasla osoba procijeni da je u posudi sa 110 bobica veća količina bobica nego što je količina od 62 bobice u drugoj posudi, a pri čemu se zanemaruje veličina bobica (Feigenson, Dehaene i Spelke, 2004).



No, ono što je važno za ranu dob jesu znanstvena istraživanja koja potvrđuju da ANS funkcionira kod 6-mjesečne djece, a što dokazuju istraživanja koja uključuju zadatke s habituacijom: bebe mogu uočiti jednakost ili razliku među skupovima s najviše 4 elementa (Klein i Starkey, 1987). Postupak je obuhvatio izlaganje beba podražajima od tri objekta (različiti po veličini, obliku, udaljenosti, svjetlini). Bebe se habituiraju na podražaje koji sadrže tri objekta i kraće ih gledaju dok u trenutku kad se pojavljuje slika s dva ili četiri objekta, dulje gledaju sliku pri čemu se može zaključiti da uočavaju razliku između ove slike i prethodnih. Kad je broj objekata veći od četiri, ne pokazuju razliku u promatranju.

Daljnja istraživanja pokazuju da mala djeca mogu uspješno odijeliti npr. količine 8 : 16 (omjer 1:2), ali ne i 8 : 12, a već s 9 mjeseci odjeljuju uspješno 8 u odnosu na 12 elemenata (omjer 2:3; Libertus and Brannon, 2010; deWind i Brannon, 2013), a slijedi omjer 3:4...

Zakovitost koja se pri tome pojavljuje opisuje se tzv. **Weberovom frakcijom ili Weberovim zakonom** (Whalen, Gallistel i Gelman, 1999) – povećanje uspješnosti odjeljivanja i smanjivanje omjera događa se s dobi, ali prati individualni razvoj.

Što je količina veća, mogućnosti pogreške koju ANS daje je veća (linearni porast), ali s porastom dobi pogreške su manje zahvaljujući iskustvima koje pojedinac stječe procjenama.

Feigenson, Dehaene i Spelke (2004) smatraju da **ANS** sadrži **dvije jezgre za procjenu**:

- prva je ona koja je određena procjenom razlika u količinama (u ranoj dobi vidljiva kada su razlike „relativno velike“ (npr. 8:16)
- druga je vezana uz male količine (do 3 objekta) koje pokazuju posve drugačija obilježja i te su pronađene i kod resus majmuna i nekih drugih životinja: djeca uvijek biraju veću količinu (do 3), a ne vode se usporedbama količina (npr. 8:16).

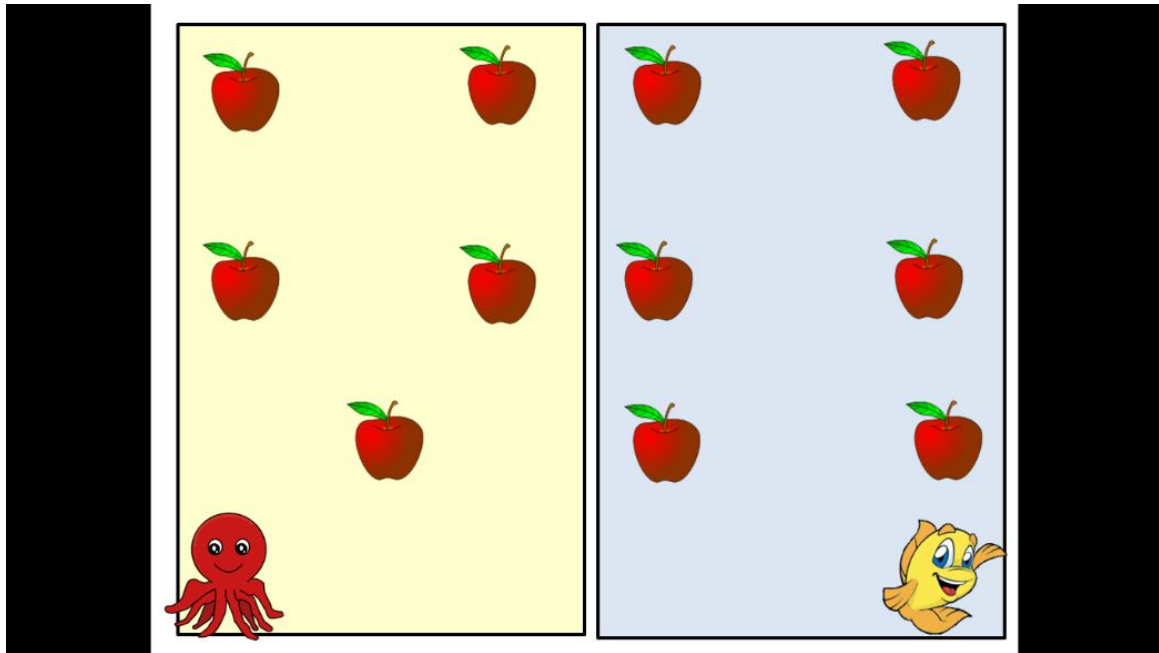
Prema rezultatima niza istraživanja pokazalo se da ANS utječe na uspješnost u matematici: Halberda, Mazzocco, Feigenson (2008) utvrdili su da je uspjeh 9 - godišnjaka na standardiziranim zadacima matematike značajno povezan s njihovim uspjehom u procjeni količina u vrtićkoj dobi (Mazzocco, Feigenson, Halberda, 2011).

Postoje podaci da **osobe s diskalkulijom imaju izuzetno loše rezultate vezane uz ANS** (Piazza i sur. 2010; Mazzocco, Feigenson, Halberda, 2011), odnosno da pokazuju nedostatnosti u procjeni količine već od najranije dobi. Te manjkavosti obilježavaju njihove mogućnosti procjene i kasnije, u školskoj i odrasloj dobi i odražavaju se na usvajanje simboličke matematike.

S obzirom na takve podatke, zadaci kojima se mogu uočiti djetetove mogućnosti intuitivnog shvaćanja brojeva, odnosno količina, pripadaju ne samo u prediktore matematičkog uspjeha, nego i u prediktore diskalkulije kao poremećaja.

Jedno manje istraživanje koje uključuje zadatke za provjeru ANS-a provedeno je i kod nas (Lenček i Peretić, 2015) po uzoru na ispitivanje Mazzocco, Feigenson i Halberda, 2011. Ispitana su djeca urednog razvoja koja su pohađala predškolski vrtićki program. Dvije su dobne skupine: djeca dobi 5,5 i ona dobi 6,4 godine. Upotrijebljeno je 66 zadataka (nakon četiri zadatka za uvježbavanje) uz vremensko ograničene. Zadaci su predstavljeni na računalu.

Primjer:



Pitanje: Ovo je hobotnica, ovo su njene jabuke. Ovo je riba, ovo su njene jabuke. Tko ima više jabuka?

Omjeri količina mijenjali su se od **1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 5:6, 6:7, 7:8, 8:9, 9:10.**

Zaključci ovog istraživanja:

Naši rezultati su u skladu s istraživanjima niza autora čiji podaci govore o postojanju ANS-a: ispitana djeca mogu procjenjivati količine točnošću koja pokazuje isti redoslijed usvajanja omjera kao i kod stranih istraživanja (uspješni su u 1:2; 2:3; 3:4; 4:5) i to s obzirom na dob.

Mlađa djeca su manje uspješna od starije (također u skladu s postavkama o razvoju ANS-a).

Količina grešaka jasno odjeljuje djecu koja su neuspješna: ta djeca mogu se smatrati rizičnima za teškoće u matematici, odnosno rizičnima za diskalkuliju.

Rezultati skupine i uspjeha pojedinaca daju omjer 1 (neuspješan): 9 (uspješnih) što odgovara učestalosti većine specifičnih teškoća učenja.

Premda se radi o istraživanju na malom broju ispitanika, ono pridonosi razumijevanju fenomena intuitivnog osjećaja za brojeve i onoga dijela matematičkih procjena temeljem kojih uspješni matematičari nerijetko uspijevaju odabrati točne odgovore ili usmjeriti matematičko mišljenje u dobrom pravcu.

Za mnoge od nas je poznat osjećaj kojega koristimo u rješavanju matematičkih zadataka: npr. ovo nikako ne može biti rezultat... ili - čini mi se da bi ovo mogao biti rezultat... Ovakva ponašanja mogu se pripisati intuitivnom osjećaju i djelovanju ANS-a.

I iz ovog manjeg istraživanja vidljivo je da postoje ona djeca kod koje ovakav intuitivni osjećaj za brojeve, odnosno količine, ne funkcionira, što može značajno otežati, ili čak onemogućiti usvajanje matematičkih znanja.

Uvažavanjem postojanja ANS-a, odnosno razmatrajući postavku o tzv. modulu za brojeve, mijenja se razumijevanje matematičkih teškoća i same diskalkulije u kojem se mogu nazirati dva usmjerenja (na što upućuje Geary, 2005):

- (1) Usmjerenja u prilog **postojanju zajedničkih akademskih vještina koje mogu biti nedostatne** i uključuju čitanje i/ili pisanje i/ili matematiku.

U pravcu ovakvih tumačenja u području matematike idu neke postavke koje daju Chinn i Ashcroft (2017). Njihova tumačenja podržavala bi koncept specifičnih teškoća učenja kao međusobno isprepletenih i nerijetko istovremeno pojavljujućih odstupanja u čitanju, pisanju i matematici.

- (2) **Izdvajajuće usmjerenje ili izdvajajuća postavka** – matematika ima pozadinu problema samo u izdvojenim nedostacima, a oni se odnose na brojevnju obradu i sustav računanja. Ovakvom tumačenju ključno pridonose određenja onih kompetencija koje čine tzv. temeljni kapacitet koji postoji kod ljudskih i kod životinjskih mozgova i načini na koji je taj kapacitet vezan uz razvoj specifičnih mozgovnih okruženja. U skladu s time su teorije prema kojima rane matematičke sposobnosti nisu pod utjecajem jezika pa odstupanja u matematici nisu vidljiva kao u ostalih specifičnih teškoća učenja.

Bez obzira je li uspjeh na matematičkim zadacima urođen i/ili vezan uz rane matematičke reprezentacije ili je pak produkt nebrojevnih perceptivnih ključeva, jezika i općih mehanizama pozornosti, nisu još točno definirani prediktori tih ranih vještina. Danas je vidljivo da mjerenje matematičke uspješnosti uključuje mjere kognitivnog i neuropsihološkog sustava kao što su spomenuti jezični sustav, vizualno-perceptivni sustav, centralni izvršni sustav zadržavanja pozornosti i potiskivanja nevažnih informacija, te drugi. Teškoće mogu proizaći iz manjkavosti u bilo kojem od tih kognitivnih sustava i/ ili njihovih interakcija te mogu dovesti do različitih oblika nedostataka te su vidljivi u različitim matematičkim zadacima.

Primjeri:

- Zadaci poput: $23 + 16$: računanje je produkt znanja i prizivanja činjenica, te primjene proceduralnog znanja.
- Problemski zadaci poput: Marko je imao 28 šljiva od kojih je 19 dobio od Ivana, a preostale šljive dobio je od Luke i Vanje koji su mu svaki dali jednako, ali je onda Luka dao još jednu više..... su rezultat računanja, jezika, razumijevanja, čitanja i vizualno prostornih sposobnosti (Geary, 1993). Rješavanja uključuju pozornost, organiziranost, promjenu matematičkog "seta", brzinu, posebno radnoga pamćenja...

U svrhu dobivanja pravih uvida u računanje ili rješavanje problema, trebalo bi razgraničiti uspjeh na pojedinim komponentama. To je osnova razumijevanja teškoća, bez obzira o kojoj vrsti zadatka se radi.

Prema usmjerenju koje podupire **zasebnost matematičkih teškoća**, problemi o kojima možemo govoriti su:

(a) **Konceptualni** (brojevi do deset i baratanje njima; numerička kompetencija /ima svoje neuralne korelate/; sustav računanja)

(b) **Proceduralni** (pravila i strategije).

Kognitivni mehanizmi u matematici su drugačiji u odnosu na one koji su vezani za ostala akademska znanja i upitno je što određuje teškoće – koncept, procedura ili veza ovih komponenti (Rittle i Johnson, 2001).

Istraživanja veze koncepata i procedura uključuje više pristupa ovim odnosima u matematici. Bihevioristi smatraju da razvoj matematičkih vještina prethodi razvoju koncepata, dok kognitivisti smataju suprotno.

Dvojica autora - Baroody i Gingsburg (1986) naglašavaju da se radi o interakcijskom djelovanju te da konceptualno znanje može dovesti do boljeg razumijevanja proceduralnog znanja, odnosno vještina, a primjena proceduralnog znanja može poboljšati shvaćanje koncepata.

Rittle-Johnson i Siegler (1998) zagovaraju postavku o paralelnom razvoju proceduralnog i konceptualnog znanja.

4.2. Usvajanje matematike u predškolskom razdoblju

Dijagnoza diskalkulije postavlja se samo ukoliko postoji dovoljna količina formalne poduke prema kojoj se može utvrditi da dijete tijekom najmanje šest mjeseci pokazuje neuspjeh u usvajanju matematike. Međutim, znakove odstupanja u smislu rizika za nastanak teškoća ili za diskalkuliju moguće je uočiti i prije nego formalna poduka uopće započne. Za prepoznavanje tih znakova nužno je poznavati **odrednice urednog razvoja u onom dijelu pokazatelja koji određuju kasniji uspjeh u matematici.**

Opis predmatematičkih vještina je prilično opsežno iskazan u radovima Piageta u kojima postoji poseban osvrt na matematiku, a prema općim razvojnim postavkama koje je oblikovao. Premda postoje mnogobrojne kritike Piagetovih istraživanja razvojnih obilježja i faza razvoja kod djece, vrijednost spoznaja i postavki koje je oblikovao u odnosu na usvajanje matematičkih znanja i danas je aktualno. Ove se spoznaje mogu primijeniti posebno u tumačenju preduvjeta za razvoj onih matematičkih znanja koja se kasnije uče u školskoj dobi, odnosno s gledišta mogućih ranih odstupanja i rizika za nastanak teškoća.

Matematička se znanja, kao i ostala ljudska znanja, razvijaju u interakciji s okolinom.

Već tijekom prve godine života - prema Piagetu to je razdoblje **senzomotoričke faze** (uključuje vrijeme do kraja druge godine) - kod djece se odvijaju učenja koja omogućavaju **shvaćanje pojmova** (npr. mama - moja mama, ostale mame... ili stolac - različite vrste stolaca) i oblikovanja prototipa te osiguravaju stvaranje generalnih kategorija i podkategorija (npr. auto – brrm.. je oznaka za sva vozila, a s vremenom dijete razlikuje auto od kamiona). Ovaj pojmovni razvoj vrlo je važan za razvoj matematičkih pojmova. Temeljem ovih znanja, kako navodi Adler (2001), jedan od vodećih stručnjaka u tumačenju diskalkulije, razvija se mogućnost kategorizacije prema boji, obliku, veličini ili nekoj drugoj kategoriji.

Adler (2001) navodi da u prvoj godini (do godinu i pol) dijete povezuje osjet s radnjom - npr. djeca shvate da će se kuglice na krevetiću pomaknuti ako ih dodirnu, usvajaju pojam stabilnosti predmeta - predmeti postoje ako ih može vidjeti ili dodirnuti, ali upoznaju i pojam reverzibilnosti (npr. unedogled će nekome dodavati igračku ako će je ta osoba vraćati). Postepeno shvaćaju da objekti postoje i kad ih se ne može vidjeti: konstantnost (može započeti govoriti o njima). To je prvi korak koji omogućava zamjenu konkretnih oblika brojevima – procesa koji će se odvijati mnogo kasnije, u početku školovanja i zahtijevat će simbolizaciju.

Urednost navedenih procesa, ali i odstupanja koja mogu biti prepoznata već tijekom ovog razdoblja, posebno kroz rane opservacije roditelja i podatke psiholoških ispitivanja, mogu biti pretpokazatelji teškoća u matematici bez obzira što još ništa ne upućuje na matematiku.

U Piagetovoj **predoperacionalnoj fazi**, koja uključuje razdoblje od 2. do 6., odnosno 7. godine, djeca ostvaruju niz učenja i provode aktivnosti od kojih su za usvajanje matematike bitne one koje se temelje na **pridruživanju, razvrstavanju, nizanju i sparivanju.**

Pridruživanje se odnosi na izbor zajedničkih osobina. Ono uključuje i način kako djeca uče pravilno upotrebljavati jezik, odnosno kako će znati koje iskustvo ima određena obilježja, a koje iskustvo ta ista obilježja nema, npr. dugačko-kratko. Odrasle osobe uvode jezik, posebno tzv. matematički jezik, o kojem će još biti govora kasnije, za posredovanje u stvaranju osnova matematike. Djeca koja ne mogu izvršiti pridruživanje prema zadanoj kategoriji, neće moći uspješno nadograđivati druge neophodne aktivnosti za daljnje usvajanje matematike.

Razvrstavanje podrazumijeva da se neki skup rastavlja u nove skupove sa zajedničkim obilježjima i složenije je od pridruživanja (npr. pospremanje igračaka). U kasnijoj matematici, ovaj temeljni proces može biti vidljiv npr. kod zadataka u kojima brojeve jednog skupa treba razvrstati u parne i neparne.

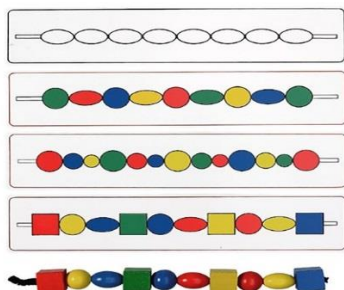


Niti ona djeca koja u igrama ili zadacima razvrstavanja u ranoj dobi neće biti uspješna, neće moći uspješno ovladati matematičkim konceptima i vještinama, odnosno iskazuju rizik za teškoće u matematici ili diskalkuliju (Adler, 2001).

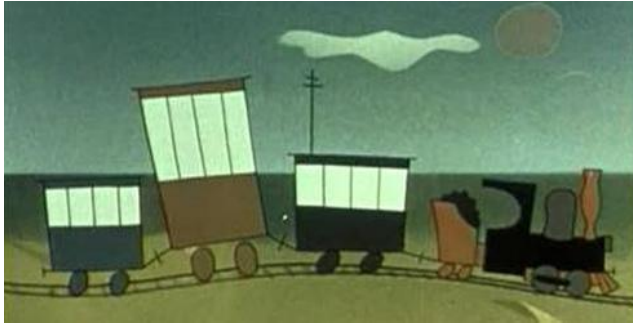
Nizanje osigurava i usvajanje pojmova *prvi*, *posljednji*, *pokraj*, *između*. Spoznaje o položaju (poziciji) osiguravaju kognitivnu podlogu za kasnija učenja prostornih odnosa, a u matematici su ta učenja važna prilikom brojanja, odnosno usvajanja brojevnog niza, prostornih odnosa u geometriji, ali i kod nekih algebarskih zadataka. *Prvi*, *posljednji*, *pokraj*, *između* ukazuju i na razvoj osobitog matematičkog jezika, o čijoj će vrijednosti posebno biti govora kasnije.

Primjer:

U ovoj fazi djeca bi trebala moći nizati predmete – npr. prema predlošku:



ili zadanim osobinama - npr. vagone od najvećih do najmanjih.

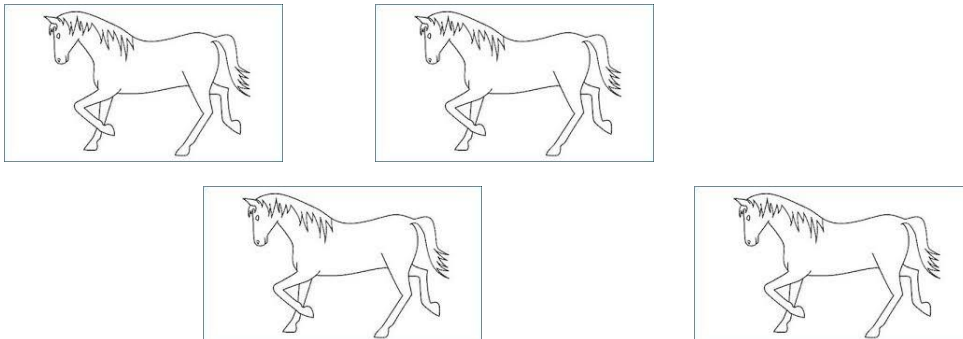


Opetovano, ona djeca koja ove aktivnosti ne mogu uspješno provoditi iskazuju osobine koje ih mogu svrstati u skupinu „rizičnih za teškoće u matematici ili za diskalkuliju“, odnosno skupinu djece koje je potrebno pratiti i raditi na poticanju usvajanja matematike, odnosno provoditi intervencijske postupke.

Sparivanje je posebno važna aktivnost za usvajanje pojma broja. Započinje obično u aktivnostima *jedan na jedan* i pomaže u utvrđivanju količine: zadaci kao npr. nacrtajte toliko vozača da svaki vozi jedan automobil ili nacrtajte jahača za svakog konja i slično, omogućavaju uvid u količinu u smislu *jednako- više-manje* bez prebrojavanja.

Neka djeca, unatoč nizu primjera koji bi trebali dati dostatan uvid u količinu bez prebrojavanja, neće usvajati ova konceptualna znanja.

Primjer odnosa jedan na jedan: nacrtaj jednog jahača za svakog konja



Mnoga od njih imat će teškoće s matematičkim konceptima općenito.

Matematički su koncepti umrežene cjeline i ovladavanje njima preduvjet je razumijevanja mogućih teškoća.

Sharma (2001) navodi obilježja ovladavanja matematičkim konceptima:

- a) intuitivni stupanj – novo što smo čuli povezujemo s onim što već znamo
- b) konkretni stupanj – konkretan materijal potreban je pri upoznavanju novog koncepta i manipulacija predmetima omogućava stjecanje novih spoznaja
- c) slikovni stupanj/ stupanj zapisa – nakon konkretnog manipuliranja, potreban je zapis koncepta, odnosno prikaz na papiru
- d) apstraktni stupanj- informaciju treba apstrahirati od predmeta i slika i prevesti na jezik simbola i formula
- e) praktična primjena znanja – matematička znanja iz jednog područja potrebno je primijeniti u drugim područjima kao i životnim situacijama
- f) komunikacijski stupanj – verbalno objašnjenje i obrazloženje postupaka krajnji je stupanj u usvajanju matematičkih konceptata i dokazuje razumijevanje tih konceptata.

Broj i brojanje pripadaju u temeljne matematičke koncepte. Kod usvajanja pojma broja, odnosno brojanja, teškoće koje se mogu javiti nerijetko su ključni znaci za definiranje rizika za teškoće, odnosno rizika za diskalkuliju, a ove teškoće ostavljaju dugoročne posljedice na usvajanje matematike.

4.2.1. Pojam broja - brojanje

U prepoznavanju razvoja predmatematičkih, odnosno ranih matematičkih znanja, posebno mjesto ima pojam broja i brojanje.

Pojam broja podrazumijeva kontinuitet aktivnosti koju djeca izvode oslanjajući se na spomenute aktivnosti pridruživanja, razvrstavanja, nizanja, uparivanja, a onda i uspoređivanja i ujednačavanja predmeta i skupova.

Prema Sharmi (1989) brojanje pripada temeljnim matematičkim konceptima čije usvajanje uključuje i slijeđenje niza uputa, prostornu orijentaciju i organizaciju, raspoznavanje uzoraka (obrazaca), vizualizaciju, dobru procjenu veličine, količine, broja, deduktivno i induktivno mišljenje.

Određeni aspekti – koraci u usvajanju pojma broja ne mogu se razviti dok se nisu usvojili neki prethodni.

Tako djeca najprije **koriste brojeve kroz igru** i kao zabavu (brojalice) te u ritualima u interakciji s odraslim osobama. Dvogodišnjaci već mogu brojati zalogaje, stepenice i slično (Geary 1994. prema Vlahović – Štetić, Nadilo, Pavlin-Bernardić, 2006). Djeca urednog razvoja u ovoj fazi započinju koristiti neke nazive za brojeve i javljaju se najprije pokušaji brojanja poput *jedan, pet, dva...* Ona uče nizati nazive brojeva – *jedan, dva, tri...* bez da im pridaju značenje, a što dovodi do toga da usvajaju niz i mogu točno prebrojiti dva do tri objekta. U počecima brojanja će svaki prekid značiti i ponovno nizanje svih elemenata – *jedan, dva, tri...*

Djeca koja ne usvajaju ove aktivnosti zapravo iskazuju znakove rizika za teškoće u matematici ili rizika za diskalkuliju.

Tijekom treće godine i nakon nje počinje pravo učenje brojeva i brojanja. U toj dobi će djeca moći točno prebrojiti i više od dva ili tri objekta te će prekinuti niz moći nastaviti bez vraćanja na početak. No, većina djece još neće moći odgovoriti na pitanje npr. koliko kocaka imaju ispred sebe, bez obzira što će točno izbrojati niz. Razlog tome je potreba usvajanja niza načela vezanih uz broj i brojanje, a koja će usvajati postupno.

Prema Gelman i Meck (1986) temeljna **načela brojanja** uključuju:

1. **Pridruživanje** „jedan prema jedan" - pri prebrojavanju predmeta u nekom skupu svakom predmetu pridružujemo samo jedan broj.
2. **Kardinalnost** - posljednji broj koji se izgovori pri brojanju skupa predmeta je kardinalni i označava ukupan broj predmeta u skupu.
3. **Ordinalnost** – poredak brojeva je od manjeg prema većem, prema uzlaznom nizu, a položaj u nizu je stalan.
4. **Konzervaciju** - broj predmeta u skupu neovisan je o prostornom rasporedu.

5. **Reverzibilnost** - koje promjene utječu na količinu, a koje ne; razumijevanje reverzibilnog odnosa zbrajanja i oduzimanja - ako nekom skupu dodamo i odmah oduzmemo isti broj, stanje se ne mijenja.

Vlahović – Štetić, Nadilo, Pavlin-Bernardić (2006) ovim načelima još dodaju :

- **Izmjerljivost** - uvjetuje međusobnu usporedbu predmeta korištenjem iste dogovorne mjerne jedinice pri usporedbi.
- **Tranzitivnosti** – „Ako je A veće od B, a B veće od C, onda je i A veće od C“.

U radu iz 2009. Vlahović – Štetić ističe još načela:

- **Prebrojivost**: bez obzira koliko je elemenata u skupu, oni se mogu prebrojiti.
- **Nevažnost redoslijeda** – promjena redoslijeda pridruživanja brojeva ne mijenja ništa – može se početi brojati s bilo koje strane.

Vraćajući se na dobne odrednice, ono što možemo očekivati kod četverogodišnjaka bit će usvajanje načela kardinalnosti – zadnji broj pri brojanju je ukupan broj elemenata u tom skupu. Između 4. i 5. godine djeca urednog razvoja usvajaju načelo ordinalnosti i mogu odgovoriti na pitanja poput: što je više, 5 ili 6 zvijezda?

Shvaćaju sekvence i povezuju nazive brojeva s količinom.

Do polaska u školu, djeca će nizom neformalnih postupaka usvajati navedena načela i matematička znanja te će ona s urednim matematičkim predvještina ma moći pridružiti objektima/količinama brojeve do 10, a onda i pridodati odgovarajuće brojke, odnosno simbole (Sinclair i Sinclair, 1986).

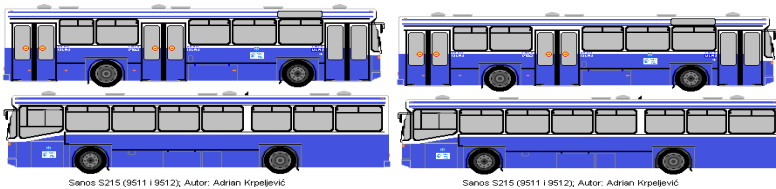
Znaci odstupanja mogu se, u razdoblju neposredno pred polazak u školu (kod nas posebno kad djeca dolaze na pregled za upis u školu), vidjeti u nizu zadataka koji se uobičajeno koriste za provjeru brojanja (Jordan, 2006), a upravo teškoće u usvajanju brojanja jedan su od prvih znakova matematičkih teškoća (Geary, 2003).

Primjeri:

Informacije mogu dati zadaci poput:

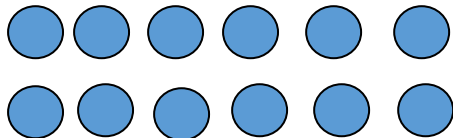
* Koliko ima bojica (razbacane bojice) – temeljem procjene / temeljem prebrojavanja

* Čega ima više - shvaćanje količine bez obzira na perceptivna obilježja

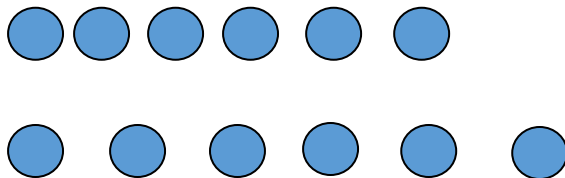


* Razumijevanje konzervacije – utječe li razmicanje krugova na percepciju količine

Položaj 1:



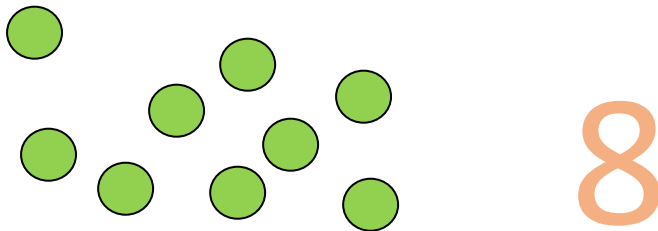
Položaj 2:



Kod neke djece bit će vidljivo da ne usvajaju brojevne nizove, odnosno da ne broje u smislu brojalice, a kasnije u smislu navođenja točnog niza i to će ukazivati na teškoće. Kod dijela djece koja će usvojiti niz, problem će nastati ukoliko ga se prekine jer neće moći nastaviti isti. Kad i usvoje niz, neka će djeca još uvijek teško vezati količinu uz broj, odnosno pridavati skupu točan broj. Dio djece koja će uspješno usvojiti navedena načela, neće dugo moći usvojiti načelo konzervacije.

U odstupanja se ubraja i nemogućnost djece da usvoje simbole – brojke kojima bilježimo količinu, odnosno broj. Djeci s ovakvim teškoćama bit će teško točno odgovoriti na zadatak:

* Koliko ima točaka; odgovara li to napisanom broju? (primjer zadatka prema Dyscalculia Screener, Butterworth, 2003)



Djeca koja neće moći napisati brojku koja odgovara broju točaka koje su zadane mogu imati problema ne samo s matematičkim znanjima nego i s grafomotoričkom izvedbom prilikom samog zapisivanja.

Premda ovo pitanje pokazuje znanja koja već ulaze u školsku dob, **većina djece prije početka formalne poduke može uspješno rješavati ovakve zadatke** – pridružiti broj, odnosno brojku količini ili čak i napisati broj koji odgovara količini.

Ukoliko roditelji, odgojitelji i okolina ne prepoznaju i ne razumiju odsustvo ovih znanja i aktivnosti kao mogući rizik za pojavu teškoća u matematici ili rizik za diskalkuliju, dječje nepoznavanje broja i brojanja neće u ovom razdoblju imati značajnije posljedice. Kod „neosjetljivih okolina“ i „neosjetljivih okolina“ izostat će neke poticajne aktivnosti koje značajno mogu unaprijediti razinu matematičkih znanja kroz neformalne postupke. Da bi u ovoj ranoj fazi osigurali poticajnu okolinu za takvu djecu, ili okolinu u kojoj će se provoditi neki oblik intervencije, potrebno je roditeljima, odgojiteljima i drugim osobama iz djetetove okoline osvijestiti važnost poznavanja točnih formalnih kriterija - što dijete u ranoj predškolskoj dobi treba razumjeti i znati vezano uz brojeve i brojanje. Potrebni su i jasni miljkazi razvoja matematičkih znanja i precizno oblikovani formalni predškolski kurikulumi usmjereni na matematiku. Poznavanje svih ovih parametara može osigurati **pravovremeno prepoznavanje rizika za matematičke teškoće ili diskalkuliju**, a što je potrebno potvrditi procesom procjene koji svakako treba uključiti psihologa i logopeda.

Poznato je da u Hrvatskoj nema prakse upućivanja predškolske djece na preglede zbog sumnje na diskalkuliju, za razliku od sve češćih upućivanja djece s rizikom za disleksiju. Unatoč tome, postoji sve veća zabrinutost zbog porasta broja dijagnoza teškoća u matematici i diskalkulije u školskoj dobi, a što bi trebalo potaknuti sustavno ispitivanje ranih matematičkih znanja, ali i ciljani rad na njihovom usvajanju.

Neprepoznavanjem rizika izostaje prilika za već spomenuto pravovremeno osiguravanje poticanja razvoja matematičkih predvještina ili, ukoliko je to potrebno, za intervencijske postupke. Rana dob je upravo najoptimalnije vrijeme za otkrivanje mogućih teškoća i pravo vrijeme za sprječavanje značajnijih teškoća koje se mogu javiti u usvajanju matematike.

U skupinu rizičnu za nastanak teškoća ili diskalkulije pripadaju i ona djeca koja nemaju uredno jezično razumijevanje i jezičnu ekspresiju i koja u ovom ranom razdoblju mogu, upravo zbog tih jezičnih teškoća, neodgovarajuće usvajati i matematički jezik, posebno brojeve.

Neka djeca koja ne uspijevaju verbalizirati brojanje i broj, ipak mogu uspješno usvajati brojevna načela (npr. mogu se oslanjati na prikaz broja prstima) jer razumiju primjenu broja.

Brojeve primjenjujemo za različite svrhe: za točno označavanje veličine skupa objekata (glavni broj), za točno označavanje položaja objekta u nizu (redni broj), za određivanje veličine objekata (primjena broja kao omjera) (Von Aster i Holger Lorenz, 2013). Upravo te različite svrhe ili uloge brojeva su za osobe koje imaju teškoća u matematici, odnosno diskalkuliju, teško shvatljive. Npr. kako isti broj – 3 označava količinu, poredak, postaje dodatkom nule – 30, označava omjer u kombinaciji $1/3$ i sl. Usvajanje uloge broja započinje također u predškolskom razdoblju i nastavlja se u nizu učenja koja slijede u školskoj dobi.

4.2.2. Početno računanje

U predoperacionalnoj fazi, osim usvajanja broja i brojanja, predškolska djeca pokazuju **znanja zbrajanja i oduzimanja do 10**. Strategije koje se pri tome javljaju mogu biti različite:

- prebrojavanje elemenata koje treba zbrojiti
- nastavljavanje brojanja od jednog od zadanih pribrojnika
- rastavljanje pribrojnika na jednake brojeve i dodavanje ostatka
- prizivanje pohranjenih rezultata iz dugoročnog pamćenja (Fuson, 1990).

Vrlo slično o strategijama zbrajanja (preklapajuće s navedenim strategijama), navode i Vlahović Štetić i Vizek Vidović (1998):

- (1) **Prebrojavanje** svih članova u skupu: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da podigne tri prsta, zatim pet i broji izgovarajući: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8“.
- (2) **Nastavljanje brojanja** od prvog pribrojnika: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da podigne tri prsta i nastavi podizati još pet prstiju uz odbrojavanje: „4, 5, 6, 7, 8“.
- (3) Strategija „**pibrajanje manjeg**“: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da digne pet prstiju (veći pribrojnik) i nastavi dodavati još tri prsta odbrojavajući: „6, 7, 8“. Ova strategija predstavlja napredak u smislu veće ekonomičnosti računanja, a primjena ove strategije pokazuje da je dijete shvatilo načela kardinalnosti i reverzibilnosti.
- (4) **Kombinacija dosjećanja i strategije**: zadatak $7 + 9$ dijete može riješiti tako da drugi pribrojnik rastavi na $7 + 2$, iz sjećanja dozove rezultat $7 + 7 = 14$ i zatim, koristeći strategiju pribrojavanja manjeg, doda preostalih 2. Pri rješavanju s većim brojevima, istodobno se koriste i činjenično znanje i strategije.
- (5) **Strategije dosjećanja**: zadatak $7 + 9$ dijete rješava tako da iz dugoročnog pamćenja dozove i informaciju i odgovori - 16.

Ovim strategijama mogu se dodati i strategije koje su naveli Siegler i Jenkins (1989), a koje uključuju:

- Korištenje prstiju, npr. zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da digne tri prsta, zatim još pet i kaže rezultat 8, bez računanja, samo uz pogled.
- Brzo odbrojavanje, npr. $3 + 5$ - dijete brzo broji 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i istovremeno uz svaki broj diže novi prst.
- Pogađanje, npr. $3 + 5$ dijete rješava tako da izgovori neki odgovor i objasni: Pogađao sam.
- Rastavljanje, npr. $3 + 5$ dijete rješava tako da razmišlja: $3 + 5$ je isto kao i $4 + 4$, a to je 8.

Oduzimanje je zahtjevnije od zbrajanja, no načini rješavanja također uključuju niz strategija pri čemu Vlahović-Štetić i Vizek -Vidović (1998) navode da je u početnim strategijama važno razumjeti brojanje unatrag:

- (1) **Strategija umanjivanja**, npr. zadatak $8 - 5$ dijete rješava tako da digne osam prstiju i od njih odbroji pet, a zatim prebroji preostale prste.
- (2) **Strategija uvećavanja** isti zadatak dijete rješava tako da digne manji broj prstiju (umanjitelj 5) i broji prste dok ne stigne do većeg broja (umanjenika tj. 8). Pri tom odbrojava: 6, 7, 8, te zaključuje da mu do 8 trebaju još tri prsta.
- (3) **Izborna strategija** - ovisno o prirodi zadatka dijete odabire jednu od gore opisanih strategija oduzimanja. Npr. za zadatak $7 - 2$ dijete može koristiti strategiju umanjivanja, a za zadatak $7 - 5$ strategiju uvećavanja.
- (4) **Strategija dosjećanja**, npr. zadatak $8 - 5$ dijete rješava tako da iz dugoročnog pamćenja dozove informaciju i odgovori 3.

Siegler (1987) napominje još i brojanje naglas kao strategiju koju djeca koriste pri oduzimanju.

Djeca koja neće uspješno zbrajati i oduzimati do 10, te će nerijetko iskazivati neučinkovite strategije, posebno kod oduzimanja, ne uočavajući odnose koje brojevi/količine zahtijevaju o ovim matematičkim operacijama, su djeca koju treba posebno pratiti u smislu usvajanja daljnjih matematičkih znanja.

Djeca s rizikom unatoč konkretima – objektima, likovima ili prstima, neće moći izvesti jednostavno zbrajanje i oduzimanje. Tek nakon puno uvježbavanja, bit će svojevrsnih pomaka u ovim jednostavnim operacijama, ali uglavnom za tzv. male brojeve (1,2,3,4). Razumijevanje ovih prvotnih strategija posebno je važno kod one djece koja će, nakon izvjesne količine poduke i unatoč novijim i drugačijim strategijama kojima će biti podučavana, i dalje biti neučinkovita u matematici i vraćat će se na uporabu tih početnih strategija.

U kasnijem radu s djecom koja imaju dijagnosticirane teškoće ili diskalkuliju, **izuzetno je važno osiguravati mogućnost da se koriste i ovim početnim strategijama** koje su usvojili. Nerijetko postoji nerazumijevanje oslanjanja na, npr. računanje uz pomoć prstiju. Korištenje prstiju može biti teško kad se javljaju zadaci koji uključuju brojeve veće od 5 jer su to brojevi veći od broja prstiju na jednoj ruci. Kod takvih zadataka mogu značajno pomoći pomagala poput štapića i sl.

Na značaj strategija, odnosno onoga kako dijete rješava neki matematički zadatak, upozorava Sharma (2001): stupanj mišljenja i strategije koje dijete koristi da bi došlo do odgovora na matematički zadatak puno su važniji od samog rezultata.

4.2.3. Likovi i tijela – uvod u geometriju

Osim pojma broja i brojanja te osnovnih računskih operacija, u predškolskom će razdoblju izranjati i niz znanja koja su preduvjeti za kasnije izvođenje geometrije: djeca usvajaju razumijevanje prostora, ravnine i zakrivljenosti, pojmove koji se odnose na plohe i linije, nazive i osobine likova i tijela... Većina djece značajan dio ovih znanja, baš kao i znanja o brojevima i brojanju, usvaja u situacijama igranja ili raznih aktivnosti s odraslima. Autori nekih od teorija nastanka teškoća u matematici, odnosno diskalkulije, ističu da su **problemi vizualne percepcije i prostorne percepcije** odgovorni za nedostatke u matematici (prema Chinn i Ashcroft, 2017). Ti problemi se očituju prvenstveno u nemogućnosti vizualnog predočavanja količina, brojeva, brojevnih crte i drugih matematičkih koncepata na papiru. Nedostaci pri tome mogu biti vidljivi već od dječjih nemogućnosti razvrstavanja likova prema veličini i obliku preko teškoća odabira odgovarajućih veličina skupova kod zadanih odnosa - veći i manji, preko zabune s brojevima kako u pogledu poretka (6 prije 5) tako i u pogledu zapisa (posebno npr. $6 / 9$;), zamjene mjesta znamenki u zapisivanju dvo-i-više-znamenastih brojeva ($15 / 51$) do zamjene mjesnih vrijednosti prilikom *potpisivanja* u računanju i *posuđivanja desetica* (Mammarella, Lucangeli i Cornoldi, 2010) te drugih problema. Prema ovim postavkama o vizualnim i prostornim teškoćama, za očekivati su i značajne teškoće djece u svladavanju geometrijskih znanja – spomenutom razumijevanju ravnine i zakrivljenosti te razumijevanju važnosti položaja, oblika i slijeda u prostoru.

Za vizualno - prostorno funkcioniranje neophodno je uključivanje desne hemisfere, koja je onda značajna i za interpretaciju brojnih informacija (Kumar i Raja, 2009), a njena neodgovarajuća aktivnost može narušiti funkcioniranje u domeni geometrije.

Početni kurikulum iz matematike za našu djecu u prvom razredu sadrži (započinje) upravo razumijevanjem vizualnih i prostornih odnosa: ukoliko se nedostaci shvaćanja ovih odnosa javljaju već u predškolskoj dobi, geometrijska znanja neće se usvajati prema očekivanjima. Upravo to prostorno mišljenje ključno može odrediti usvajanje matematike (Mulligan, 2015) kroz sve aspekte.

Značaj vizualne i prostorne percepcije vidljiv je i u usvajanju pojmova **lijevo i desno**, a oni su također bitni za usvajanje matematičkih znanja, uključujući geometrijska znanja.

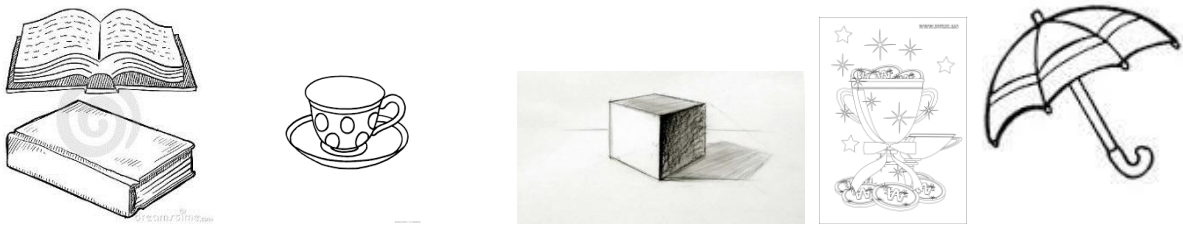
Poznato je da djeca sa specifičnim teškoćama učenja u pravilu teško usvajaju označavanje lijevo-desno, a teškoće se posebno očituju kod zadataka koji, osim pokazivanja na vlastitom tijelu, zahtijevaju prepoznavanje lijevo-desno obilježja na drugoj osobi. Djeca kojoj je teško prihvatiti relativnost uvjetovanu promjenom referentne točke za određivanje odnosa lijevo-desno (baš kao i kod točaka koje određuju početni i završni položaj) mogu uz ove probleme iskazati probleme orijentacije na papiru kao i probleme razumijevanja prijenosa trodimenzionalne stvarnosti u dvodimenzionalni, papirni oblik. Sva ova obilježja mogu pridonijeti riziku za nastanak teškoća u aritmetici i geometriji.

Postoje i „obrnuti“ podaci koji govore u prilog istim postavkama o povezanosti matematičkih teškoća i vizualnih nedostataka - velik broj djece s dijagnosticiranim matematičkim teškoćama ima probleme u vizualnome području (Sigmundsson, Anhold i Talcott, 2010) i teškoće prostorne spoznaje.

Primjeri nekih zadataka koji su djeci teški ako postoje odstupanja u vizualnom i prostornom razumijevanju:

Primjeri:

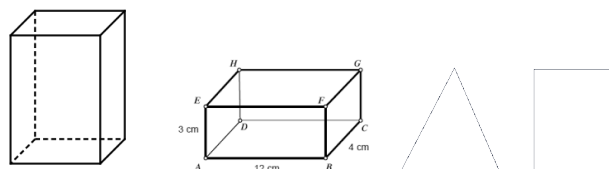
Što je zakrivljeno, a što ravno – zakrivljene plohe označi križićem (x) :



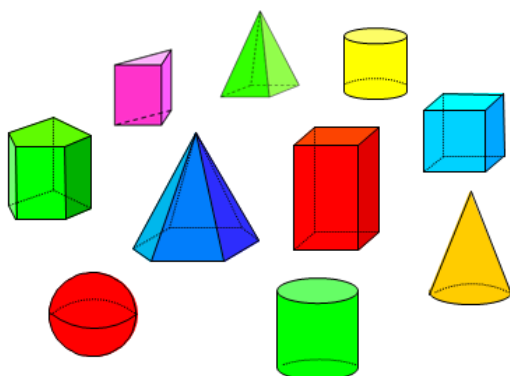
Razlikuj krug od kugle:



Obojaj kvadar žuto, a kvadrat zeleno



Razlikuj stožac od piramide i drugih geometrijskih tijela



5. Matematika u školskoj dobi: uredan razvoj i odstupanja

Većina djece započinje školovanje u razdoblju koje, prema Piagetu, pripada *fazi konkretnih operacija*. To je vrijeme kada započinje formalno opismenjavanje, ali i formalno učenje matematike. Formalna poduka matematike dovodi do mogućnosti da teškoće ili pak rani znaci diskalkulije budu lakše prepoznati i vidljivi, kako roditeljima, tako i nastavnicima. I dijete samo može uočiti da mu je teško rješavati neke zadatke ili zadaće.

Faza konkretnih operacija već prema nazivu upućuje da je u usvajanju znanja potrebno oslanjati se na konkretne materijale. U ovom razdoblju (prema Vlahović Štetić i Vizek Vidović, 1998) djeca mogu obavljati logičke operacije s manje usmjerenosti na sebe (izlazak iz tzv. egocentrizma koji je prevladavao tijekom predoperacionalne faze). Djeca promatraju, procjenjuju i vrednuju da bi riješila problem. Stvaraju mentalne kategorije pri čemu poopćuju fizičke situacije s brojevima. Čine višestruke klasifikacije, slažu objekte i smještaju nove objekte u serije. Sve aktivnosti odvijaju se kroz rukovanje konkretnim materijalima. Ti konkretni materijali važni su za stvaranje matematičkih pojmova jer se misaone sheme oblikuju upravo kroz korištenje predmeta, odnosno kroz motoričke puteve. Ovu činjenicu, o uporabi konkretna, posebno je važno uvažavati za onu djecu koja imaju teškoće ili diskalkuliju jer njihovo oslanjanje na konkretne materijale može biti duže i zahtjevnije u smislu traženja više pomoći i razumijevanja u kasnijim razdobljima ove faze.

Očekujemo da djeca u dobi od sedam godina barataju brojevima:

- Shvaćaju kako broj predstavlja određenu količinu.
- Broj može zamijeniti konkretne predmete.
- Prepoznaju i mogu napisati brojke.
- Znaju brojati čak i do 100 i vršiti neka matematička računanja (nije rijetko da mehanički i izvode neke operacije).
- Shvaćaju brojeve i brojevni niz tako da je svaki broj odijeljen od sljedećeg za jedan i ima svoje mjesto u brojevnom nizu (iz ovih znanja djeca će, u dobi od devet i deset godina moći razumijevati npr. koji je broj veći - 15 ili 19 jer kada shvati značenje jedinice, može to znanje i koristiti).
- Razvijaju vizualizaciju problema – rješavaju problemske zadatke i planiraju.

U ovom razdoblju postaje jasno da je matematika puno više od četiri operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje).

No, upravo početno zbrajanje i oduzimanje dat će niz podataka koji se smatraju dobrim predviđateljima kasnijeg uspjeha u matematici (Geary, 2013).

S obzirom na činjenicu da školovanje znači i uvođenje formalna poduke, postaje lakše pratiti ono što se očekuje kroz razine znanja i strategije koje dijete izvodi u rješavanju matematičkih zadataka.

U odnosu na **kurikulum**, osim navedenih znanja vezanih uz **broj, brojanje i osnovne računske** operacije, osnovnoškolci u fazi konkretnih operacija usvajaju dalje načela koja su važna za rješavanje matematičkih zadataka. Tako se u ovom razdoblju pojavljuje načelo **konzervacije** (o čemu govori niz Piagetovih radova iz 70.-ih godina prošlog stoljeća).

Konzervacija zapravo označava drugi oblik nepromjenjivosti – kvantitativna svojstva predmeta su nepromjenjiva (broj, količina, težina...) i ona se ne mijenjaju usprkos promjenama u njihovom vanjskom izgledu. Istraživanja su dala podatke o konzervaciji mase, težine i volumena, dužine, prostora, udaljenosti, vremena, brzine i pokreta.

Konzervacija fizičkih svojstava javlja se u dobi od sedam do osam godina. Započinje s konzervacijom količine tvari oko sedme, osme godine (Piagetovo ispitivanje s cvjetovima i novčićima) i konzervacijom dužine u istoj dobi (ispitivanje sa štapićima), zatim slijedi konzervacija težine oko devete, desete godine (ispitivanje s kuglicama od gline) i konzervacijom zapremnine /volumena (ispitivanje s posudama) oko 11-12. god. (prema Vasta i sur., 1998).

U fazi konkretnih operacija u odnosu na matematička znanja, kod djeteta se još može očekivati:

- Dublje shvaćanje **reverzibilnosti** (npr. $5 + 3 - 3 = 5$ - ako broju 5 dodamo 3 on neće biti isti, ali ako mu onda i oduzmemo 3 opet ćemo dobiti 5; npr. možemo reći da je A veće od B, ali i da je B manje od A)
- **Ispravno interpretiranje i preslagivanje** objekata, mijenjanje veličina i oblika
- **Konceptualno mišljenje**
- **Učenje uz konkretne manipulacije i verbalne instrukcije**
- **Razvoj tranzitivnosti** – odnos A B C, ukoliko je $C > A > B$ onda je $C > B$ (7-8 god.).

S porastom formalnih znanja koje se nude kroz školske programe i poduku, matematičke vještine i koncepti (proceduralna i konceptualna znanja) postaju sve složeniji, a time se javlja i sve veći broj onih obilježja koja u školskoj dobi mogu biti prepoznata kao znaci diskalkulije.

Odstupanja u svim navedenim obilježjima koja zapravo pokazuju razvoj matematičkih kompetencija, mogu se smatrati i značajkama diskalkulije.

5.1. Obilježja diskalkulije u školskoj dobi

Pregledom istraživanja vodećih istraživača u području diskalkulije (Geary, Hamson i Hoard, 2000; Buttworth, 2007) mogu se izdvojiti najučestaliji znaci diskalkulije. Ista obilježja izdvojena su i na stranicama međunarodne organizacije za diskalkuliju

(<http://www.aboutdyscalculia.org/symptoms.html>, pristupljeno studeni 2016):

- **Zaostajanje u vještini brojanja:** djeca dobi pet do sedam godina ne razumiju osnovne principe brojanja kao npr. da nije važno kojim redoslijedom se broje objekti i da to ne utječe na broj objekata.
- **Zaostajanje u korištenju vještina brojanja kao sredstva za zbrajanje:** djeca s diskalkulijom usmjerena su na neučinkovite strategije značajno duže nego njihovi vršnjaci bez teškoća.

Primjer neučinkovite, odnosno pogrešne strategije daje Geary (2012) – kod zbrajanja $5 + 3$ djeca s diskalkulijom će se nerijetko osloniti na brojanje na način da izgovore pet (5) kao prvi broj ili prvu vrijednost (ne kao kardinalnu vrijednost od koje započinje računanje), čemu onda dodaju i broje dalje šest, sedam (ukupno tri broja). Takvim načinom rezultat je 7.

Osim toga djeca s diskalkulijom ne oslanjaju se na „brojanje u glavi“ već puno duže koriste prste i ta strategija pokazuje zaostajanje od 2 do 3 godine u odnosu na djecu koja uredno usvajaju matematiku.

- **Stalne teškoće u upamćivanju matematičkih činjenica** (najmanje do 13 godine), posebno onih vezanih uz zbrajanje, oduzimanje i množenje.

Geary (2012) napominje da se razlozi neučinkovitog prizivanja činjenica mogu tumačiti s tri gledišta:

- (1) Razlozi problema su u nedostacima oblikovanja fonetskih jezičnih reprezentacija u dugoročnom pamćenju, a koji nastaju još u ranoj dobi i vežu se uz usvajanje brojevnog niza i brojanje.
- (2) Razlog može biti u neučinkovitim strategijama potiskivanja nevažnih asocijacija koje utječu pri aktiviranju radnog pamćenja za prizivanje iz dugoročnog pamćenja.
- (3) Kašnjenje u brojevnom sustavu koji podupire točne reprezentacije malih količina i procjene većih količina, također je mogući razlog neučinkovitog prizivanja činjenica.

Navedenim obilježjima diskalkulije mogu se još dodati neke osobitosti:

- **Otežano razumijevanje brojevnog niza** na način da je svaki broj odijeljen od sljedećeg za 1 i da taj broj ima svoje mjesto u brojevnom nizu (npr. kako je 1 između 3 i 4, a isti takav 1 je između 8 i 9). Iz ovakvog nerazumijevanja javlja se i neshvaćanje „prostornog“ prikazivanja količine i brojeva na brojevnoj crti:

---1--2--3---4---5---6---7-----

na način da osobe s disleksijom nerijetko očekuju da bi brojevi, odnosno količine trebalo prikazivati kao npr.

-1-----2-----3-----4-----5-----

- **Problemi u prepoznavanju brojki** te prepoznavanju i imenovanju matematičkih simbola npr. : dijeljenje; ² kvadriranje, te povezivanju matematičkih simbola i operacija koje simboli označavaju.
- **Problemi svrstavanja brojeva u ispravne kolone**, nerazumijevanje mjesnih vrijednosti, odnosno količina vezanih uz jedinice, desetice, vidljivo u potpisivanju, npr. 1034 + 149
- **Nemogućnost stvaranja plana** kako neki matematički problem riješiti - problemski zadaci: što najprije činiti?
- **Nerazumijevanje značenja riječi** u zadacima, kao npr. odredi duljinu hipotenuze ako su katete...
- **Teškoće bilo kakvog upamćivanja brojeva** npr. telefona, rezultata, kao i brojeva za „prijenos“ kod računanja preko 10.
- **Teškoće s određivanjem i razumijevanjem vremena** na satu (primjer 16.45) i bilo kakvim vremenskim izračunima.
- **Posebne teškoće s množenjem.**
- **Problemi rastavljanja brojeva** (npr. 10 čini 5 i 5 ili 6 i 4).
- **Problemi razumijevanja zadataka** koji uključuju više koraka za rješavanje problema.
- **Značajna zabrinutost i anksioznost** vezana uz sve što uključuje matematiku.

Lenček, Peretić, Arapović (2010) opisale su obilježja odstupanja djece s teškoćama u matematici i diskalkulijom u odnosu na obrazovnu razinu i uvažavajući zahtjeve kurikulumu kod nas:

Područja u kojima djeca s teškoćama u matematici i diskalkulijom iskazuju probleme u prvom razredu:

- Teškoće brojanja, brojanja unatrag, brojanja u sekvencama
- Brojevni pravac – teškoće razumijevanja prethodnika i sljedbenika
- Matematičke operacije – nesavladanost zbrajanja i oduzimanja
- Matematičke strategije – neučinkovite ili manje učinkovite/nedovoljno brze (oslanjaju se isključivo na baratanje konkretima/predmetima)
- Komutativnost – nepoznavanje pravila
- Desetica – netočno računanje kod prijelaza preko 10
- Geometrija – neprepoznavanje trodimenzionalnosti
- Problemski zadaci – učestalo nerješavanje ili pogrešno rješavanje.

Područja u kojima djeca s teškoćama u matematici i diskalkulijom iskazuju probleme u drugom razredu:

- Temeljne matematičke činjenice (rezultati zbrajanja i oduzimanja) i dalje su nesavladane i neautomatizirane
- Množenje – nesavladana tablica množenja, savladane neke “kategorije”, npr. $x2$, $x5$
- Dijeljenje – nesavladano
- Matematičke strategije – i dalje neučinkovite, korištenje prstiju za sve operacije i oslanjanje na zbrajanje za zadatke množenja
- Matematička pravila – ne usvoje i ne primjenjuju ili ih pogrešno primjenjuju
- Koraci matematičkog procesa – nerijetko pogrešan slijed i nepoznavanje dijelova (npr. $12 \times 5 = 510$ ili $21 \times 12 = 63$)

42

-
- Desetica – i dalje je prisutno netočno računanje u prijelazu preko desetice (zaboravljanje prijenosa desetice ili neshvaćanje potrebe „posuđivanja“ desetice)
 - Posebne teškoće u zadacima u kojima računaju s nulom (greške poput $5 + 0 = 0$ ili $5 \times 0 = 5$)

- Problemski zadaci – pogrešno rješavanje, najčešće krivo *postavljanje* zadatka, posebno zadataka s nepoznatim početkom.

Područja u kojima djeca s teškoćama u matematici i diskalkulijom iskazuju probleme u trećem razredu:

- Temeljne matematičke činjenice (rezultati zbrajanja i oduzimanja, množenja i dijeljenja) i dalje nesavladane i neautomatizirane
- Matematičke strategije – i dalje neučinkovite (korištenje prstiju)
- Koraci matematičkog procesa – i dalje prisutan pogrešan slijed ili nepoznavanje dijelova procesa (npr. potpisivanja kod množenja ili kod dijeljenja)
- “Zaglavljivanje” – dijete ponavlja neki broj ili radnju više puta, naročito nedavno naučenu radnju (operaciju), a ponekad novonaučenu radnju primjenjuju tamo gdje taj postupak uopće nije prikladan
- Zamjena identiteta operacija (zamjenjuje zbrajanje i množenje: $3 \times 2 = 5$)
- Pogrešna uporaba usvojenih pravila: npr. pravilo množenja s 0 ili 1; $5 \times 0 = 5$ ili $5 \times 1 = 1$
- I dalje prisutne teškoće zbog nerazumijevanja nule
- Geometrija – teškoće prostornog smještanja likova i baratanja šestarom
- Problemski zadaci – pogreške moguće ne samo u postavljanju zadatka, već u svim dijelovima rješavanja problemskih zadataka jer zahtjevi postaju sve složeniji.

5.2. Obilježja diskalkulije kod adolescenata i odraslih

S porastom dobi rastu zahtjevi matematičkih zadataka, odnosno količina formalne poduke pa je pred osobama s diskalkulijom sve više novih i složenijih problema. Obilježja diskalkulije time se mijenjaju, posebno kod srednjoškolaca i kod odraslih osoba gdje, prema *Dyscalculia organisation* (www.dyscalculia.org) postaju vidljive sljedeće teškoće:

- **Teškoće procjene troškova** (u trgovini, pri nabavi namirnica)
- **Teškoće učenja i primjene matematičkih koncepata i osnovnih matematičkih činjenica**
- **Nedostatne mogućnosti** bilo kakvih **proračuna ili izračuna** vezanih uz korištenje **novčanih sredstava** (podizanje novca, trošenje korištenjem bankovnih kartica)
- **Problemi s vremenskim konceptima** i planiranjem vremena, oblikovanjem ili primjenom rasporeda kao i određivanjem približnog vremena potrebnog za neku aktivnost
- **Problemi s mentalnom matematikom**
- **Teškoće u pronalaženju različitih pristupa problemu** (stalno oslanjanje na iste pokušaje/ strategije)
- **Problemi s vizualizacijom uzoraka**, različitih dijelova matematičkog problema, ili s prepoznavanjem ključnih informacija potrebnih za rješavanje problema.

Odabir zanimanja kod osoba s diskalkulijom uvjetovat će i pojavu nekih drugih obilježja i specifičnosti koje proizlaze iz situacija u kojima se zahtijeva matematičko mišljenje, matematičko znanje i matematički jezik. Većina osoba s diskalkulijom bira one poslove koji ne zahtijevaju primjenu matematike.

6. Mogući razlozi neuspjeha u matematici, odnosno diskalkulije

Chinn i Ashcroft (2017) navode moguća područja teškoća u učenju matematike definirajući na taj način značajke odstupanja odnosno diskalkulije. Smatraju da postoje čimbenici koji su u samom djetetu, kao npr. radno pamćenje, dok su neki drugi posljedica same matematike, npr. nedosljednosti u načinu na koji samo dijete traži podršku u učenju matematike. Postoje i razlozi koji su rezultat interakcije oba čimbenika.

Navode sljedeća obilježja:

6.1. Zbunjenost zbog pravca

Početna učenja govore da brojimo i pišemo od jedan (1) do deset (10) s lijeva na desno od manjih prema većima. Pisanje višeznamenkastih brojeva npr. 395 je takvo da započinje s najvećom vrijednosti na lijevo i završava s najmanjom koja se smješta desno. Ovu nedosljednost podupire i računanje u kojem npr. potpisivanje kod zbrajanja ili oduzimanja započinjemo računanjem odozgo prema dolje,

$$\begin{array}{r} 452 \\ + 123 \\ \hline \end{array}$$

a rezultat se nalazi na dnu. Suprotno tome, rezultat dijeljenja nije na dnu računa već u prvom redu, no mnoga djeca sljedeći princip računanja pojave rezultata nakon procesa koji se odvija odozgo prema dolje, mogu smatrati rješenjem upravo na dnu. U primjeru koji slijedi, rješenje na dnu bilo bi upravo 0.

$$768: 4 = 192$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 8 \\ 0 \end{array}$$

Nedosljednost koja se javlja može podupirati nedostatan pamćenje.

Primjer konfuzije s pravcem može se očitovati u zadacima zbrajanja u kojima npr.

$$\begin{array}{r} 543 \\ + 356 \end{array}$$

Može unatoč nerazumijevanju pravca dati dobar rezultat ($5+3=8$, $4+5=9$ i $3+6=9$ 899)

No, ovaj pravac računanja neće dati točan rezultat kod zadatka: $354+269$

pa rezultata može biti $= 5114$ ($3+2=5$; $5+6=1$ + prijenos *jedinice* $9+4+1=14$)

Posebno je poznavanje pravca važno kod oduzimanja:

684	431
-243	-285
-----	-----
441	254

Chinn i Aschroft (2017) napominju i da nerazumijevanje pravca može otežati i usvajanje decimalnih brojeva, posebno vezano uz činjenicu da se broj smanjuje što je više udesno udaljen od zareza tj. oznake decimale.

Problemi razumijevanja pravca utjecat će i na razumijevanje negativnih brojeva: kako shvatiti da je -30 veći od $+20$.

6.2. Problemi sa slijedom

Postoje različiti oblici sljedova koje usvajamo u matematici, od 0 do 9 pa slijed desetica 10,20,30..., slijed parnih brojeva. Za razumijevanje nekih sljedova, poput npr. 12,22,32,42... neka djeca ne mogu shvatiti i prepoznati varijaciju. Brojanje unatrag također je vrlo zahtjevno za neku djecu.

Fawcett i Nicholson (1999) upozoravaju da ove probleme nemaju samo osobe s diskalkulijom već i osobe s disleksijom. One npr. neće moći stajati na jednoj nozi i brojati unatrag od 100 jer to zahtijeva istovremeno izvođenje dviju radnji pri čemu je jedna zapravo izmjena uobičajenog načina izvođenja te radnje (uobičajeno brojimo unaprijed) i zahtijeva značajan kognitivni napor. Nedostatak automatizacije ovih vještina može biti razlogom nastanka problema u matematici.

Svako obrtanje smjera, kao što je to npr. u zadacima tipa $8 = _ + 3$ je izrazito zahtjevno jer se mijenja „normalan“ slijed i za očekivati je da će djeca s diskalkulijom imati značajne teškoće.

Moguće je da se jave i problemi u praćenje slijeda koraka da bi se ostvario neki algoritam, posebno npr. kod dugih dijeljenja.

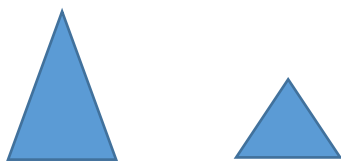
Problemi praćenja i uvažavanja te primjene slijeda mogu biti razlogom nastanka teškoća u matematici i diskalkulije.

6.3. Vizualne teškoće

Uobičajeno je da se vizualne teškoće u matematici povezuju sa zrcalnim pisanjem brojeva (posebno 6 i 9, ali i 15 i 51) kao i zamjenama vizualno sličnih brojeva (tu mogu biti i zamjene 1, 7, 5 i 3).

Chinn i Aschroft (2017) navode prepoznatljive teškoće poput zamjena + i x (puta) ili x (*iks*) i x (puta) x x 2x (*iks puta dva iks*), ali i 9 i 6, x2 i x² koje proizlaze iz problema vizualne percepcije i oslanjanja na vizualnu percepciju u izvođenju matematičkih zadataka.

Vizualne teškoće posebno mogu utjecati na usvajanje geometrije: npr. ukoliko dijete vizualno ne razlikuje jednakokračni i jednakostranični trokut, teško će rješavati zadatke u ovom području.



Algebarski zadaci mogu uključivati zagrade $()$, $\{ \}$ ili $]$, čije je razlikovanje težak zadatak za osobe s problemima vizualne diskriminacije, a to onda može utjecati na mogućnosti rješavanja zadanog.

Nedostaci u vizualnoj percepciji djece s diskalkulijom mogu se nadomjestiti npr. istaknutim označavanjem bitnih dijelova matematičkog zadatka ili onih dijelova za koje već postoje podaci da su razlog zabuna te odabirom drugih postupaka umjesto uobičajenih.

6.4. Prostorna svjesnost

Vrlo je blisko povezana s vizualnom percepcijom i odgovorna je za ispravno smještanje prilikom određivanja mjesnih vrijednosti, kod geometrijskih zadataka i algebarskih (x kao puta i x kao nepoznanica). Nedostatna prostorna svjesnost može imati posljedice u neodgovarajućem zapisivanju i rješavanju zadataka poput:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 458 \\ + 1345 \end{array}$$

Posebno je bitna kod dvodimenzionalnog prikaza trodimenzionalnih matematičkih tijela (kugle, kvadra, stošca, piramide) i složenijih prikaza koji se koriste u algebarskoj geometriji. Budući je prostorna svjesnost vrlo blisko povezana s vizualnim teškoćama i problemima sa slijedom niz obilježja navedenih kod ovih razloga teškoća u matematici može se primijeniti i povezati s prostornom svjesnosti.

6.5. Radno i kratkoročno pamćenje

Radno pamćenje odnosi se na izvor obrade ograničenog kapaciteta uključen u očuvanje informacija dok istovremeno obrađuje iste ili neke druge informacije (Baddeley, 1986). Individualne razlike u kapacitetu radnog pamćenja pripisuju se ulozi izvršnih funkcija, kao što je potiskivanje nevažnih informacija, te brzini obrade i znanjima (prema Swanson i Beebe-Frankenberger, 2004).

Suprotno, kratkoročno pamćenje tipično uključuje situacije u kojima se manje količine materijala zadržavaju pasivno i zatim se reproduciraju u slijedu. Niz je istraživanja o radnom pamćenju u matematici (Gathercole i Alloway, 2008; Hoffman, 2010) koja snažno podupiru vrijednost radnog pamćenja za rješavanje matematičkih zadataka. Primjer uloge radnog pamćenja vidljiv je ukoliko rješavamo npr. 458-279... Potrebno je zamisliti sve korake koje činimo dok rješavamo ovakav zadatak.

Radno pamćenje objašnjava značajni udio varijance matematičkih spoznaja. Ukoliko postoje problemi s radnim pamćenjem moguće je da se dijete ne može osloniti na vizualno predočavanje zadatka i ne može „zadržati“ sliku zadatka i stoga ne uspijeva riješiti zadatak.

Djeca s lošim radnim pamćenjem vrlo često se smatraju nepažljivima i površnim (Gathercole i Alloway, 2008).

Loše kratkoročno pamćenje kod nekih osoba s diskalkulijom veže se uz npr. neuspješno prepisivanje informacija s ploče ili ekrana, probleme upamćivanja serije i neuviđanja serije.

Različiti oblici problema s radnim i kratkoročnim pamćenjem mogu biti razlogom teškoća u matematici i diskalkulije.

6.6. Dugoročno pamćenje

Nedostaci dugoročnog pamćenja posebno su vidljivi u usvajanju tablice množenja. Geary (2004) smatra da su ovi nedostaci prizivanje iz dugoročnog pamćenja vrlo dobar dijagnostički pokazatelj matematičkih teškoća.

Chinn (2003) je analiziranjem grešaka u prizivanju rezultata tablice množenja zaključio da oni učenici koji čine više grešaka (tu pripadaju i oni s diskalkulijom) čine i nedosljednije greške. Razlog tome je što informacije iz tablice množenja zapravo za njih nemaju značenje niti uzorak, niti racionalu, a to se onda vidi upravo po načinu griješenja.

Nerijetko je u načinima griješenja vidljiva „kvaliteta“ matematičkog mišljenja, odnosno moguće je vidjeti pravilnosti u nekim pogreškama. Tako npr. u prizivanju tablice množenja odgovor na $6 \times 7 = 53$ pokazuje posve drugačiju grešku nego odgovor $6 \times 7 = 56$.

Problemi dugoročnog pamćenja mogu biti razlogom nastanka teškoća u matematici i diskalkulije.

6.7. Brzina izvođenja zadatka

Spornost ometa automatizaciju u čitanju, pisanju i aritmetici (Ackerman i Dykman, 1996). Duže vrijeme rješavanja zadataka pokazuje neusvojenost činjenica ili procedura na razini koja može upućivati na diskalkuliju.

Jedna od temeljnih mjera nekih testova koji govore o znakovima rizika za diskalkuliju je upravo vrijeme rješavanja. Djeca se tijekom testiranja mogu poticati na brže rješavanje (Butterworth, 2003) jer je automatizirano baratanje matematičkim činjenicama pokazatelj učinkovitih matematičkih znanja (Cholmsky, 2014). Stoga je brzina izvođenja zadataka važan dijagnostički element za potvrdu diskalkulije.

Poznato je iz mnogobrojnih kliničkih situacija da je upravo problem s brzinom jedan od najučestalijih koji se veže uz sve specifične teškoće učenja. Stoga produženo vrijeme npr. odgovaranja ili rješavanja zadataka i testova predstavlja jednu od najčešćih, uglavnom uvijek prisutnih mjera prilagodbe za osobe s teškoćama.

Kod teškoća u matematici i kod diskalkulije produženo vrijeme može dati priliku da zadatak bude riješen. Nisu rijetka djeca koja tijekom školovanja zbog nedostatne brzine u rješavanju matematičkih zadataka, unatoč točnosti dijelova koje stižu riješiti, nikada ne uspijevaju doći do konačnih rješenja, a što može rezultirati stalnim i trajnim negativnim ocjenama. Izuzetno je važno dati mogućnost djetetu da pokaže znanje, makar ono bilo „sporo izranjajuće“.

6.8. Rječnik i matematički jezik

Matematika koristi matematički jezik da bi se razmijenile matematičke ideje na poseban način (Gafoor i Sarabi, 2015).

Matematika ima svoj rječnik i jezik (Sharma 1985, Jitendra, 2015) kao i „probleme riječima“ – problemske zadatke. Obilježja djece s diskalkulijom su i u neusvajanju matematičkog rječnika, ali i matematičkog jezika u cjelini. Primjer posebnosti matematičkog jezika je već i sama riječ operacija (matematička ili ona bolnička) gdje je vidljivo da semantika u matematici može biti posve odijeljena od svakodnevnog života (Boaler, 2015).

6.8.1. Više o matematičkom jeziku

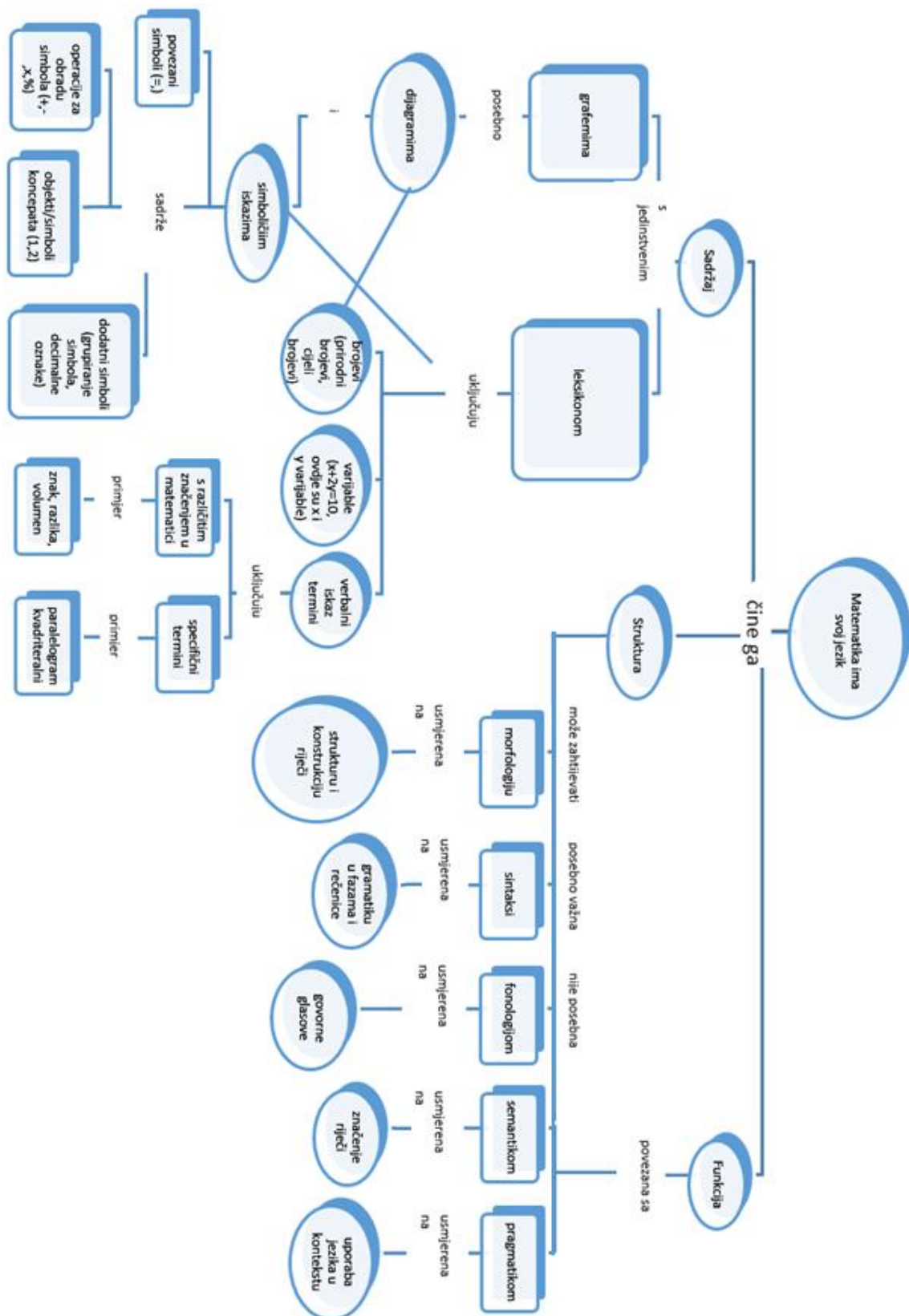
Matematički jezik ne odgovara strukturi niti pravilima materinskog jezika. Uključuje sposobnost čitanja i razumijevanja, jasnoga izražavanja matematičkih misli i logičkoga mišljenja te prepoznavanja i korištenja zajedničkih obrazaca u matematičkim spoznajama. Njegovo usvajanje je za neku djecu vrlo teško.

Savladati matematički jezik uključuje razumjeti i interpretirati usmene matematičke izraze, dekodirati pisane i grafičke prikaze matematičkih ideja, izraziti kvantitativno ideje i postavke u usmeno i pismeno različitim kontekstima.

Sastavnice matematičkog jezika odnose se na **sadržaj, strukturu i funkciju**.

To je vidljivo iz prikaza kojega daju Gafoor i Sarabi (2015):

Slika 2: Sastavnice matematičkog jezika



(preuzeto iz Gafoor, A. K.; Sarabi, M. K. (2015) Need for Equipping Student Teachers with Language of Mathematics. <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED560111.pdf>)

Matematički sadržaji iskazuju se grafemima i terminologijom kao i kod drugih jezika.

Matematički grafem uključuje jedinstveni iskaz koji se javlja u matematici i uključuje vizualne dijagrame, brojeve i simboličke izraze. Iako se govori o matematičkom jeziku kao univerzalnom, neki od matematičkih grafema nisu univerzalni. Tako primjerice brojevi imaju različite oblike pisanih znakova na arapskom i npr. malayama jeziku.

Matematički simboli mogu se klasificirati:

- simboli za objekte / koncepte (npr. brojevi)
- simboli za operacije / procesni simboli (npr. aritmetičke operacije)
- simboli za odnose (npr. okomito, paralelno)
- pomoćni simboli (npr. zagrade).

Matematička struktura uključuje pravila **fonologije, morfologije i sintakse**.

Fonologija se odnosi na glasovni sustav – izgovorne oblike.

Morfologija govori o pravilima oblikovanja riječi - u matematici je zanimljivo da se niz riječi temelji na prefiksima i sufiksima preuzetih iz grčkog i latinskog jezika. Morfološko označavanje kroz uporabu npr. pojmova koji uključuju točno označavanje i procjenu (deset i desetak...) može biti nedostatno kako iz nerazumijevanja razlika točnosti i procjene, tako i iz nerazumijevanja funkcije morfološkog označitelja.

Sintaksa se bavi oblikovanjem rečenice. Oblik rečenice u matematičkom iskazu može biti puno teže shvatljiv, bez obzira na pravila koje poznajemo, u odnosu na materinski jezik (primjer: *pet puta više od...* ili: *kvadrat duljine katete...*). Morfološki označitelji i sintaktički odnosi su posebno važni u problemskim zadacima. Sintaktička pravila koja matematika koristi ponekad se čine zahtjevnijima od sintaktičkih pravila materinskog jezika: npr. *za dva više od broja koji je produkt zbroja pribrojnika dva puta većeg od 4 i onog za 2 većeg od 5...*

Funkcija jezika očituje se u **rječniku i pragmatičkoj sastavnici**.

Rječnik matematike posebna je kategorija čija osobitost je vidljiva kroz specifična matematička značenja riječi koje zahtijevaju odgovarajući kontekstualni okvir, odnosno primjenu.

Tako npr. **rječnik matematike** uključuje poznavanje pojmova za:

- određenje broja: glavni broj, redni broj, nula, parni broj, neparni broj, jedinice, desetice, cijeli broj, decimalni broj, razlomak
- funkciju broja: pribrojnik, zbroj, umanjnik, umanjitelj, razlika, množitelj, množenik, umnožak, faktori, produkt, djeljitelj, djeljenik, količnik
- operacije: zbrajanje (zbroji; pribroji; dodaj; pridodaj; netko ti je dao; uvećaj)
 - oduzimanje (oduzmi; makni; više nemaš; netko ti je uzeo; umanji)
 - množenje (pomnoži; multipliciraj)
 - dijeljenje (podijeli; razdijeli).

Postojanje velikog broja riječi koje trebaju upućivati na određeno matematičko mišljenje (npr. 5 plus 3 upućuje na isto što i: *dodaj broju 5 broj 3, pribroji broju 5 broj 3, 5 više 3 je...*) također može biti problem za dijete s teškoćama, odnosno s diskalkulijom. Iz ovog je primjera vidljivo da ponekad u matematici koristimo riječi koje nisu matematičke – kao npr. dodaj..., a što također može otežavati rješavanje različitih problema.

U matematici se javljaju i osobite matematičke riječi poput kateta, poligon, rotacija, binom, trinom, polovina, četvrtina, volumen.

Ova velika raznolikost može biti razlogom za teško aktiviranje pamćenja jer ne postoje jasne mentalne predodžbe koje bi se pokrenule izgovaranjem naziva.

Opisana obilježja matematičkog jezika upućuju da on ima osobiti rječnik, poredak riječi, sinonime, negaciju, konvencije, idiome, kratice, dijelove koji odstupaju, strukturu rečenice i strukturu odlomaka/cjelina. Ima i dijelove koji nisu usporedivi s ostalim jezicima, odnosno s materinskim jezikom, kao što su predodžbe, jednadžbe, obrada simbola i odnosi među simbolima.

Uz to, matematički jezik ima značajno uporište u **logici**. U matematičkom jeziku naglasak je na **konstrukciji** (Esty, 1992 prema Esty, 2017).

Suštinu matematike zapravo možemo gledati kroz matematički jezik. Uspješno usvajanje moguće je samo ako postoji dugo i nadgledano iskustvo u uporabi matematičkog jezika u situacijama koje uključuju argumentiranje i dokaze (Allen, 1988).

Stoga je podučavanje djece matematičkom jeziku, i to od najranije dobi, nužan preduvjet uspješnog usvajanja matematike, a odsustvo ponude matematičkog jezika u okružju u kojem dijete raste jest čimbenik rizika za teškoće u matematici i razvoj diskalkulije.

Roditelji trebaju stvarati poticajnu sredinu za usvajanje matematičkog jezika. Oni mogu «nuditi» djetetu matematiku razgovarajući o brojevima, količinama i njihovome korištenju, uklapajući matematički jezik u svakodnevni.

O učenju matematičkog jezika u najranijoj dobi mogu govoriti podaci o razumijevanju i zatim uporabi prijedloga jer su oni važni za temeljne odnose u aritmetici, geometriji, a onda i

algebri. Kako je dijete ovladalo riječima poput *u, na, ispred, iza, iznad, ispod, pokraj, pored, do, uz...* u predškolskom razdoblju, može ukazivati na moguće teškoće s matematikom u kasnijom dobi. Osim prijedloga, vrlo je važno da djeca usvoje riječi kao što su *jednako, isto, različito; više, manje*.

Rano oblikovanje matematičkog jezika i ono što se usvaja u počecima školovanja, prema gledištu samih početnika, je značajno udaljeno od materinskog jezika kojim se služe kako bi naučili druge školske predmete.

Koristeći matematički jezik, nastavnici podučavaju djecu matematičkim idejama i vezama koje nije lako pretočiti u riječi. Očekuju razumijevanje i uporabu, baš kao što je to slučaj s očekivanjima kod materinskog jezika – tj. da ga djeca naprosto usvoje. No, za usvajanje matematičkog jezika kod djece koja imaju teškoće u matematici ili diskalkuliju potrebno je osmisлити strategije nalik onima koje se koriste u učenju stranih jezika. Matematički jezik nije materinski jezik.

Jezično razumijevanje i jezična proizvodnja unutar matematičkog jezika uključuje i kombinacije koje su u počecima teško shvatljive za svu djecu, a posebno mogu biti teška za djecu s diskalkulijom:

npr. pet osmica ili pet osmina ili pet puta više od osam ili za pet više od osam...

Iz svih prethodnih je primjera vidljiva i složenost odnosa koju matematika nosi kroz morfo-sintaktičko označavanje. Ono je, uz rječničko znanje, posebno važno u problemskim zadacima.

Kategorija **problemskih zadataka** (često nazivanih i zadaci riječima) uključuje različite razine matematičkog jezika i predstavlja, prema većini autora, najsloženiji oblik zadataka u kojima se isprepliću matematički jezik, matematičko mišljenje i matematičke činjenice.

6.8.2. Problemski zadaci

Unatoč činjenici da su problemski zadaci vrlo zahtjevan oblik matematičkih zadataka, djeca ih mogu uspješno rješavati već u predškolskoj dobi. Npr.:

Ivan ima 2 pokemona, a onda je pronašao još 2. Koliko pokemona Ivan sada ima?

Jučer je Marko imao 2 autića. Našao je još autića pa sad ima 4. Koliko je autića našao?

Ana ima 3 papige. Dvije papige su odletjele. Koliko ih je ostalo?

Istraživanja su pokazala da mlađa djeca uspješnije rješavaju ovakve zadatke kad je **kontekst** u zadatku **osoban** (npr. ako ti imaš...), a formulacija rečenice jasnija. Starija djeca također bolje rješavaju problemske zadatke s osobnim kontekstom, no rečenična formulacija ne utječe na uspjeh jer ova djeca uglavnom imaju dobro razvijene sheme za reprezentaciju zadataka.

Djeca s teškoćama u matematici ili diskalkulijom teško usvajaju sheme za predočavanje zadataka, odnosno dugo uopće nemaju takve reprezentacije i stoga ne mogu rješavati ovakve zadatke.

Premda se iz ovih navedenih primjera problemski zadaci mogu činiti jednostavnima, njihovo rješavanje zapravo zahtijeva složene aktivnosti, odnosno provođenje više koraka kako bi se riješio zadatak:

(1) **prepoznavanje problema**

(2) tumačenje **kako se problem može postaviti**

(3) pronalaženje što treba učiniti da bi se **izračunalo rješenje** (Riley i Greeno, 1988).

S početkom školovanja, kad problemski zadaci uključuju i čitanje, koraci rješavanja ostaju jednaki, no uključuju i čitanje.

Kod bilo kakvih teškoća s problemskim zadacima važno je da djeca, ali i oni koji postavljaju zadatak, osvijeste spomenute korake pri rješavanju zadataka i gdje se sve problemi mogu pojaviti.

Kroz upute za provedbu i usvajanje ovih koraka, potrebno je prepoznati moguće razloge teškoća:

A. Pročitaj pažljivo tekst - Djeca s teškoćama čitanja ili disleksijom mogu zbog problema dekodiranja netočno pročitati zadatak ili ga pročitati, ali uopće ne razumjeti zadano.

B. Podvuci činjenice koje su potrebne za rješavanje problema – Djeca s jezičnim teškoćama mogu ne razumjeti dane činjenice, odnosno koje su informacije one koje su važne za problem, koje imenice (osobe), koje količine.

C. Nacrtaj sliku, prikaži osobe, odnose, objekte (količine) koje olakšavaju rješavanje - Ilustriranje u svrhu povezivanja činjenica i određivanja problema: djeca koja ne mogu odrediti što je poznato, a što je nepoznato, što se traži ili što je problem, ne mogu „postaviti“ zadatak.

D. Ispiši brojeve koji pokazuju rečenicu koja govori o problemu - Pretvaranje postavljenog problema u simbolički prikaz: neophodno je baratanje brojevima tj. brojkama i simbolima za operacije (+, -, x, :) odnosno procedurom – neka djeca dugo ne ovladaju simbolima i neće uspješno vezati simbole za brojeve niti procedure pa neće ispravno moći ispisati zadano.

-E. Riješi zadatak - Odabir strategije za pronalaženje rješenja: npr. strategije poput brojanja na prste ili prizivanja činjenica iz pamćenja (sama strategija može biti neučinkovita - odabir prizivanja iz pamćenja u kojem činjenice nisu dobro pohranjene ili je strategija dobro odabrana, ali njena primjena nije učinkovita - npr. brojanje na prste s početkom brojanja na „krivom prstu“ za početak zadatka).

F. Provjera rezultata - Učinkovitija je ako se koristi neka druga strategija, a ne ona koju smo odabrali za rješavanje zadatka (npr. ako se pri rješavanju oslanjamo na prizivanje činjenica iz pamćenja za tablicu množenja, u provjeri se možemo koristiti zbrajanjem brojeva)

Dijeljenjem zadatka na ove sastavnice povećava se mogućnost prepoznavanja suštine problema.

Za razumijevanje onoga što se pita, odnosno onoga što se zadatakom traži, potrebno je:

- (a) **Razumjeti semantičke odnose** koji prikazuju tri različite vrste odnosa pa govorimo o: *zadacima kombinacije, zadacima promjene (povećanja i smanjenja), zadacima usporedbe.*

Primjeri:

■ **Kombinacija**

- A ima 3 loptice. B ima 4 loptice. Koliko loptica imaju zajedno?
Nepoznata količina / Nadskup
- A i B imaju nekoliko loptica. A ima 4, B ima 5. Koliko imaju zajedno.
Nepoznata količina / Nadskup
- A ima 4 loptice. B ima nekoliko loptica. Oni zajedno imaju 9 loptica. Koliko loptica ima B?
Nepoznata količina/ Podskup
- K4 A ima nekoliko loptica. B ima 6 loptica. Oni zajedno imaju 9 loptica. Koliko loptica ima A?
Nepoznata količina/ Podskup
- K5 A i B imaju zajedno 8 loptica. A ima 3 loptice. Koliko loptica ima B?
Nepoznata količina/ Podskup
- K6 A i B imaju zajedno 9 loptica. A ima nekoliko loptica. B ima 5 loptica. Koliko loptica ima A?
Nepoznata količina/ Podskup

■ **Promjena**

- A je imao 4 loptice. Onda mu je B dao 5 loptica. Koliko loptica A ima sada?
Završni skup / uvećanje
- A je imao 9 loptica. Onda je 4 dao B. Koliko loptica A ima sada?
Završni skup / umanjenje
- A je imao 3 loptice. Onda mu je B dao nekoliko loptica. Sada A ima 8 loptica. Koliko loptica mu je B dao?
Mijenjajući skup / uvećanje
- A je imao 8 loptica. Onda je nekoliko loptica dao B. Sada A ima 3 loptice. Koliko je loptica dao B?
Mijenjajući skup/ umanjenje
- A je imao nekoliko loptica. Onda mu je B dao 5 loptica. Sada A ima 8 loptica. Koliko je A imao loptica na početku?
Početni skup / uvećanje
- A je imao nekoliko loptica. Onda je 5 dao B. Sad A ima 4. Koliko je loptica A imao na početku?
Početni skup / umanjenje

■ **Usporedba**

- A ima 9 loptica. B ima 5 loptica. Koliko loptica više ima A od B?
Razlika skupova /više
- A ima 8 loptica. B ima 6 loptica. Koliko loptica manje ima A od B?
Razlika skupova / manje
- A ima 3 loptice. B ima 5 loptica više od A. Koliko loptica ima B?
Uspoređeni skup / više

- A ima 9 loptica. B ima 5 loptica manje od A. Koliko loptica ima B
Uspoređeni skup/ manje
- A ima 8 loptica. On ima 5 više od B. Koliko loptica ima B?
Referentni skup / više
- A ima 3 loptice. On ima 5 manje od B. Koliko loptica ima B?
Referentni skup /manje

(b) Odrediti položaj nepoznatog skupa

- nepoznati početak - primjer: koji je broj od kojega trebamo oduzeti 5 da dobijemo 9):
 $\underline{\quad} - 5 = 9$
- nepoznata sredina zadatka – primjer: Ana ima 9 bombona. Odlučila je kupiti još toliko bombona da ukupno ima 15. Koliko bombona treba još kupiti?
 $9 + \underline{\quad} = 15$
- nepoznati kraj – primjer: Iva ima tri lopte, a Mara četiri puta više od nje. Koliko lopti imaju zajedno?
 $3 + (3 \times 4) = \underline{\quad}$

Nepoznati skup funkcionira unutar spomenutih zadataka kombinacije, promjene i usporedbe.

Nakon prepoznavanja potrebnih podataka i određivanja nepoznatog skupa rješavanje problemskih zadataka uključuje:

- (c) Isključivanje nebitnih podataka**
- (d) Zadržavanje sintaktičke strukture**
- (e) Određivanje koraka za rješavanje problema.**

Sva djeca, a posebno ona koja imaju matematičke teškoće ili diskalkuliju, imaju najviše teškoća u prijenosu pisanih riječi u matematičke operacije (odabir operacije) i odabiru simbola za operacije.

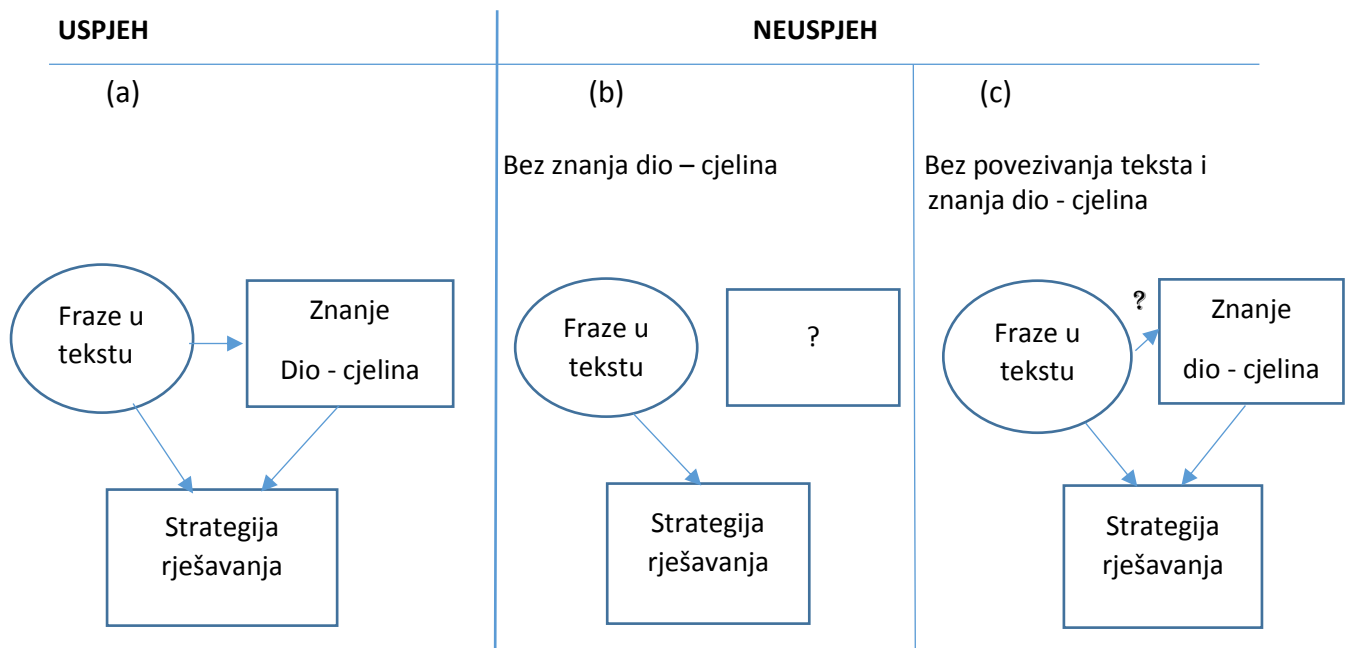
Djeca često nisu uspješna u prijenosu sposobnosti rješavanja problema na neke druge, nove situacije i na nove probleme (Jonassen i sur., 2003).

Orton još 1987. upozorava da je najčešći problem kod zadataka riječima u neuspješnom korištenju poznatih informacija. Da bi se riješili ovog problema, neke od strategija su:

- (1) Napisati problem u primitivnom obliku i crtanjem/skiciranjem postaviti problem
- (2) Preoblikovati jednostavne postavke u jednostavan jezik
- (3) Prevesti problem riječima u više matematičke postavke, brojke, dijagrame i sl.

Cummins (1991) navodi mrežu kojom pojašnjava kada se problemski zadaci rješavaju uspješno, a kada se to ne događa:

Slika 3: Mreža koja objašnjava dobro i loše postignuće na problemskim zadacima:



Prema ovoj autorici:

(a) **Uspješno rješavanje zadatka** - riječi i fraze iz teksta direktno uvjetuju postupke rješavanja ili su te riječi označene u dijelovima zadatka što dovodi do postupaka rješavanja (npr. postoje riječi poput *dodati*, *oduzeti* koje jasno upućuju na postupak).

(b) **Pogrešni odabiri** - proizlaze iz nedostatnih znanja o dijelovima i cjelini. Ako tekst ne sadrži frazu koja direktno upućuje na postupak rješavanja, problem ne može biti riješen jer ne postoji alternativni put.

(c) **Pogrešni odabir** – prema lingvističkom gledištu, pogrešan odabir je rezultat nepostojećeg ili neodgovarajućeg označavanja verbalnih iskaza u odnosu *cjelina – dijelovi* i vodi prema neuspjehu u pristupu znanju o odnosu *cjelina-dijelovi*. Drugačije formuliranje povećava vjerojatnost da će se znanju o odnosu *cjelina -dijelovi* pristupiti uspješno.

Reprezentacijski dio problemskih zadataka je onaj s kojim se najčešće javljaju problemi i u tom se segmentu javljaju i razne praktične strategije koje pomažu svladavanju ovih problema za svu djecu, a posebno za djecu s teškoćama u matematici i diskalkulijom

(<https://www.ixl.com/promo?partner=google&campaign=1085&adGroup=Math-Specific+K-8&gclid=CMLlz-LI19ICFQefGwodM4gBHQ>).

Problemski zadaci pripadaju u kategoriju zadataka koja je, zbog svoje složenosti, teška svoj djeci, ne samo djeci s teškoćama i diskalkulijom. Stoga bi unutar školskih programa trebalo osigurati više poduke i ponavljanja kao i praktičnih životnih primjera sa svrhom uvježbavanja pronalaženja uspješnih načina rješavanja problemskih zadataka.

6.9. Kognitivni stil

Krutetskii (1976) smatra da je za uspjeh u matematici potrebna fleksibilnost u kognitivnom stilu. Premda postoji niz nastavnika koji pokušavaju odrediti konačni oblik za podučavanje matematike, sve je jasnije da to nije moguće.

Chinn (2012) daje prikaz dva temeljna primjera kognitivnog stila kod učenika u matematici:

	Tip gusjenice	Tip skakavca
Prvi pristup problemu (prepoznavanje)	<ol style="list-style-type: none"> 1. Usmjerenje na dijelove i detalje 2. Pregledavanje brojeva i činjenica da bi se odabrala odgovarajuća formula 	<ol style="list-style-type: none"> 1. pregledavanje, holističko gledanje na zadatak, slaganje slike 2. Pregledavanje brojeva i činjenica za približnu procjenu odgovora i približno sužavanje raspona odgovora. Koristi kontrolirano istraživanje, ne nagađanje.
Rješavanje problema	<ol style="list-style-type: none"> 3. Formule, orijentacija na procedure. 4. Ograničen fokus. Korištenje jedne metode. 5. Radi u serijskim koracima, uobičajeno prema naprijed. 6. Koristi brojeve točno kako su dani (doslovno brojevno) 7. Sigurniji je s olovkom i papirom. Dokumentira/zapisuje. 	<ol style="list-style-type: none"> 3. Orijentiran na odgovor. 4. Fleksibilan fokus. Koristi više metoda. 5. Često radi suprotno od već isprobanog. 6. Prilagođava, „lomi“ brojeve, stvara nove oblike da bi mu računanje bilo lakše. 7. Rijetko zapisuje. Izvodi mentalne izračune (i radi intuitivno).
Provjeravanje i vrednovanje odgovora (potvrda)	<ol style="list-style-type: none"> 8. Nerado provjerava odgovore. Ako učini provjeru, ona će biti istom metodom, istim putem kao i kod procedure računanja. 9. Često ne razumije proceduru ili vrijednost brojeva. Radi mehanički. 	<ol style="list-style-type: none"> 8. Često ocjenjuje i vrednuje odgovor suprotno izvornoj proceduri. Provjerava alternativnom metodom/procedurom 9. Dobro razumije brojeve, postupke i odnose.

Učenici s diskalkulijom češće odabiru načine koji govore u prilog funkcioniranju prema tipu „gusjenica“ i nesklonosti u promjeni kognitivnog stila.

Ukoliko nastavnik ne poučava u skladu s učenikovim kognitivnim stilom, učenikovo nerazumijevanje može biti tim veće, a njegov neuspjeh izraženiji čak i u onim segmentima u kojima bi, ukoliko oni nisu zahvaćeni primarnim razlozima diskalkulije, učenik uz odgovarajuću poduku mogao savladavati zahtjeve.

Uvažavanje kognitivnog stila smatra se jednim od **bitnih preuvjeta uspjeha u matematici**.

Metakognitivni pristup podučavanju može pomoći da učenik ima kontrolu nad svojim učenjem tako da postavlja ciljeve učenja i promatra napredak kako bi ih postigao. Isticanje osobitosti učenja svih učenika sa specifičnim teškoćama učenja (posebno npr. potrebe za globalnim pregledom, vizualizacijom, motoričkom potkrijepom, pa i kretanjem i slično, vodi prema osvještavanju važnosti kognitivnog stila za učenje, a onda i učenje matematike.

6.10. Konceptualne sposobnosti

Dječja sposobnost da oblikuju koncepte ojačava s nizom iskustava koje dijete prima. „Dril i praksa“ se često koriste da podupiru nove teme i spoznaje, ali to ne mora pomoći razvoju konceptata. Učenici s diskalkulijom imaju tipično sporiji tempo rada i često zbog toga imaju i manje prilike za prakticiranje nekih aktivnosti. Ako je dijete stalno neuspješno u matematici, imat će manje uspješnih iskustava i kao posljedica toga i manje prilike da vidi dobre uzorke rada koje može generalizirati i oblikovati koncepte. To može povećati teškoće i usporiti napredak (Chinn i Aschroft, 2017).

Piaget smatra da dječje građenje matematičkog znanja proizlazi više iz generalnog razvoja djeteta (Hughes, 1986). No, Chinn i Aschroft smatraju da je logičnije da će dijete s teškoćama u učenju matematike bolje napredovati s **eksplicitnom podukom**. Uz to, prijelaz s konkretnih manipulacija na apstraktne simbole moguć je samo uz snažnu podršku.

Izgradnja matematičkih konceptata, za koju je izvjesno da se kod osoba s diskalkulijom ne odvija na način kao kod onih koji uredno usvajaju matematiku, prema kliničkim i stručnim iskustvima, zahtijeva posebno podučavanje. Usvajanje konceptata zahtijeva kod ovih osoba i duže vrijeme učvršćivanja i niz ponavljanja pri čemu je potrebno oslanjanje na nastavnički vođenu eksplicitnu poduku (Gersten i sur., 2008. prema Geary, Howard i Bailey, 2011).

6.11. Anksioznost

O strahu od matematike ima priličan broj istraživanja. Zabrinutost koja se javlja kad je potrebno rješavati matematičke zadatke je **negativna emocionalna reakcija na situaciju koja uključuje rješavanje matematičkih problema** (Young, Wu i Menon, 2012;)

Anksioznost može biti poticajna ako doprinosi uključivanju svih snaga u rješavanju problema. No, može biti i oslabljujuća, ne dopuštajući da se iskažu dobre mogućnosti koje neka osoba ima u situacijama koje zahtijevaju iskazivanje tih mogućnosti. Na žalost, matematička anksioznost je u pravilu otežavajuća i nerijetko bolna. Lyons i Beilock (2012) utvrdili su da se kod osoba s diskalkulijom, prije nego započne rješavanje matematičkog zadatka, aktiviraju dijelovi mozga povezani s doživljajem prijetnje i boli. Young i suradnici (2012) su pronašli aktivnost u područjima koja su specifična za matematičku anksioznosti i nisu vezana s generalnim doživljajem anksioznosti, inteligencijom, radnim pamćenjem ili vještinom čitanja.

Time ova područja mogu biti mjesta generiranja teškoća, odnosno razloga neuspjeha u izvršavanju matematičkih zadataka. Pojava anksioznosti nije samo obilježje funkcioniranja osoba s teškoćama u matematici već i razlog koji može dovesti do neuspjeha.

Razlika koju djeca s diskalkulijom pokazuju u odnosu na urednu populaciju je i u količini „ne pokušaja“, odnosno **odustajanja**: ovaj odabir je češći kod onih koji imaju teškoća i općenito se češće javlja u matematici (Houssart, 2005) u odnosu na neka druga područja.

Madsen i sur. (1995) su upravo kao jedan od ishoda konceptualno orijentiranog podučavanja za stjecanje matematičke kompetencije postavili smanjivanje „ne pokušavanja“ smatrajući to važnim elementom u rušenju uvjerenja da je matematika nešto što ne znamo i nismo u stanju izvesti.

Opća uvjerenja o matematici poput: *matematika je teška, u matematici ima samo jedan točan odgovor, samo genijalci mogu stvarati matematiku...* mogu povećavati neprilagođavanje situaciji u kojoj treba riješiti neki problem, a onda i smanjiti mogućnosti da se uspije u rješavanju. Takva su uvjerenja često prisutna kod osoba s diskalkulijom.

Uvjerenja vezana uz matematiku su često netočna: tako npr. očekujemo da većina djece bez problema usvoji tablicu množenja, no podatak koji navode učitelji iz Velike Britanije na pitanje *koliko desetogodišnjaka neće znati činjenice iz tablice množenja*, daje procjenu od čak 60% (Chinn, 2012).

Stavovi o matematici su ključni za drugačije razumijevanje učenja matematike, pristupa koji imaju oni koji uče i oni koji podučavaju.

Hattie (2009) naglašava da kada kognitivne sposobnosti odražavaju ono što osoba može, osobine ličnosti odražavaju ono što će osoba učiniti.

Doživljaj neuspjeha u stalnim pokušajima rješavanja matematičkih zadataka kod osoba s diskalkulijom može imati za posljedicu stav: ja to ne mogu učiniti, ne mogu to riješiti, a onda i češće odustajanje od bilo kakvih pokušaja.

Anksioznost može djelovati i na druga područja čija je uloga važna u matematičkim zadacima. Tako postoje podaci da anksioznost negativno djeluje na radno pamćenje što značajno smanjuje uspjeh u matematičkim zadacima (Ramirez i sur., 2017)

Time se uloga anksioznosti, najčešće percipirana kao posljedica problema u matematici, mijenja i dovodi ne samo na razinu obilježja koje odlikuje ponašanje osoba s teškoćama, odnosno diskalkulijom, već se čak promiče njen značaj na razinu etiološkog čimbenika.

Sva navedena obilježja koja opisuju **anksioznost osoba s diskalkulijom** zapravo mogu biti smatrana **uzročnicima nastanka teškoća** koje ove osobe iskazuju u matematici.

Chinn (2007) stoga predlaže provođenje **upitnika** koji može pomoći osvještavanju razine anksioznosti odraslih pojedinaca:

1 nikad zabrinut 2 ponekad zabrinut 3 često zabrinut 4 uvijek zabrinut

1. Izračunati napojnicu za konobara u restoranu.
2. Izračunati cijenu stvari kad ste u inozemstvu.
3. Provjeriti račun obavljene kupnje.
4. Izračunati 20% sniženja na rasprodaji.
5. Provjera vraćenog novca kod kupovine.
6. Izračunati iznos potreban za ljetovanje.
7. Zbrajati četiri cijene, npr. $5.99 + 10.99 + 19.99 + 3.95$ za izračun cijene obroka.
8. Pročitati raspored vožnje vlaka.
9. Izračunati troškove tjednog budžeta.
10. Provjeriti čija ponuda za korištenje mobitela je najbolja za vlastite potrebe.
11. Pretvoriti mjeru iz jedne jedinice u drugu.
12. Brzo prizvati matematičke činjenice kao npr. 6×9 .
13. Razumijevanje koeficijenata za okladu za neko od natjecanja.
14. Napisati ček.
15. Provjeriti iznos PDV iznosa na računu.
16. Izračunati povišicu ako je ona 3,25%.
17. Provjeravati stanje na kreditnoj kartici.
18. Izračunati koliko sredstva za uništavanje korova treba za 5 litara spreja.
19. Provjeriti količinu prema receptu koji je namijenjen za 4 osobe kada kuhate za 6 osoba.
20. Prisjetiti se vaših matematičkih satova iz škole.

Izračunajte vaš ukupni rezultat (i to je matematika!).

Podaci koje Chinn navodi govore o prosječnom rezultatu 34 (Chinn, 2007). Rezultat 60 i više govori da osoba pripada u 3,5% onih s najvišom razinom anksioznosti. Pri tome je najčešćih 8 zadataka koji tome pridonose: pretvaranje mjera iz jedne jedinice na drugu, koeficijenti na okladi, sjećanje na školsku matematiku, 3,25% povišice, novac u inozemstvu, PDV na računu, ponuda za mobitel, izračun sredstva za korov. Ispisivanje čeka najmanje zabrinjava.

7. Postavke o uzrocima diskalkulije

Premda ranije navedeni razlozi nastanka diskalkulije zapravo objašnjavaju uzroke, razina na kojoj zadiru u etiološke mehanizme znatno je plića od razina na kojoj se objašnjavaju uzroci diskalkulije prema postavci genetske osnove i/ili postavke o neurobiološkom porijeklu, odnosno one koje tumače utjecaj okolinskih čimbenika.

Jedinstvene postavke o uzroku pojavnosti diskalkulije još uvijek nema.

7.1. Genetska osnova

Uloga genetike kod djece s diskalkulijom najvećim je dijelom usmjerena na studije blizanaca, prema paradigmi koja je korištena i kod istraživanja disleksije. Prva istraživanja u tom području proveo je Kosc (1974) utvrdivši da se može govoriti o genetskom opterećenju na način postojanja genetske osnove kod diskalkulije. U jednoj od prvih opsežnijih studija blizanaca Alarcon i suradnici (1997) utvrdili su da se diskalkulija može potvrditi kod 58% monozigotnih i 39% dizigotnih blizanaca, a što govori o značajnoj podudarnosti na razini 0,73 i 0,56.

Osim studija blizanaca, o genetskoj ulozi diskalkulije, dokazi su prikupljeni i u istraživanjima koja se temelje na obiteljskim studijama. Shalev i sur. (2001) dokazali su da gotovo polovica braća i sestara djece s razvojnom diskalkulijom također ima diskalkuliju. Čak 66% majki ispitane djece također je imalo teškoće u matematici, odnosno diskalkuliju, 40% očeva i 53% rođaka. Rizik za diskalkuliju je 5 do 10 puta veći nego u općoj populaciji.

Ovi rezultati ukazuju na značajnu ulogu nasljeđivanja, no sam način kojim genetika određuje pojavnost diskalkulije nije jasan.

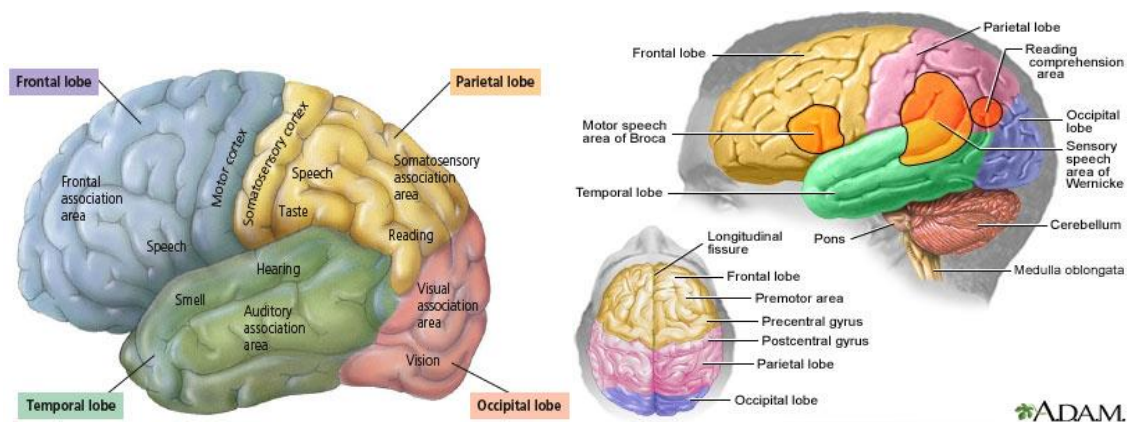
U pravcu određenja gena koji bi bio, odnosno gena koji bi bili nositelji onih osobina koje su povezane s diskalkulijom, dio istraživača izdvaja i prikazuje slučajeve Turnerova sindroma. Kod slučajeva dokazanog sindroma, unatoč urednoj inteligenciji, jezičnom funkcioniranju i čitanju, pokazuju se značajna odstupanja u matematici koje po obilježjima u potpunosti pripadaju diskalkuliji (Butterworth i sur., 1999). Smatra se da su genetska određenja razlog neurološkim odstupanjima i to pretežno u parijetalnoj zoni, odnosno u intraparijetalnom žlijebu, a što je potvrđeno nalazima fMRI pretraga (Molko i sur., 2004).

7.2. Neurobiološka osnova

Pretpostavke o modulu za brojeve postavljaju pitanje postojanja mozgovno specijaliziranog sustava i neuroanatomskih korelata koji podupiru matematičke procese. S obzirom na nedostatke koji su vidljivi kod diskalkulije, takav bi sustav pokazivao odstupanja, odnosno neodgovarajuća anatomska i/ili funkcionalna obilježja.

Ilustracija 2:

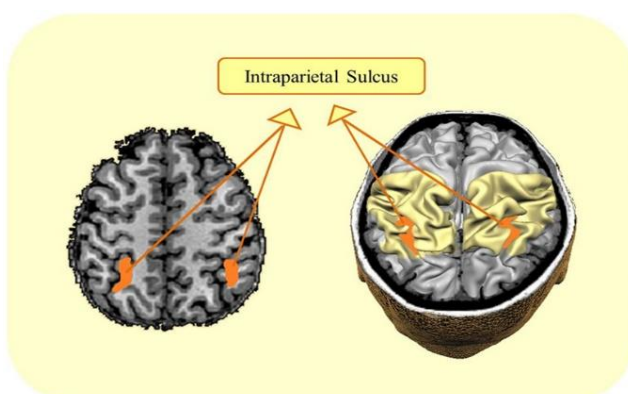
Prikazi mozga s označenim područjima zbog lakšeg prepoznavanja mjesta „matematičkih zona“



Slikovne pretrage/prikazi mozga koji se temelje na predočavaju funkcionalnih neuroloških obilježja daju podatke o postojanju takve specijalizirane mreže u mozgu vezane uz matematičku obradu u kojoj se ističe *parijetalni režanj*, posebno *intraparijetalni žlijeb* kao oni dijelovi koji su aktivni prilikom brojevnice obrade i aritmetike (Dehaen i sur., 2003). Ove nalaze potvrđuju studije u kojima su sudjelovali pacijenti s mozgovnim lezijama (van Harskamp i Cipolotti, 2001) – *lijevi intraparijetalni žlijeb* i *angularna vijuga* odgovorni su za uspjeh u aritmetičkim zadacima. Aktivnosti *parijetalnog režnja* uključene su i u procjene broja u malim setovima uz napomenu da se ove aktivnosti vežu i uz promjene koje se događaju s dobi, a nisu jednake kod osoba s diskalkulijom kao kod osoba s urednim usvajanjem matematike (Piazza i Izard, 2009, Piazza i sur., 2010).

Zanimljive podatke, vezane ne samo uz funkciju već i uz neuroanatomske razlike, daje istraživanje Isaacs i sur. (2001) na adolescentima koji su prijevremeno rođeni i imali su loše rezultate u aritmetici: kod njih je nađena manja količina sive tvari u lijevom *intraparijetalnom žlijebu* u odnosu na kontrolne parove koji su također prijevremeno rođeni, ali nisu imali matematičke teškoće.

Ilustracija 3: Položaj intraparijetalnog sulkusa



Podaci istraživanja u kojem je korištena funkcionalna magnetska rezonance za rasvjetljavanje aktivacije mozga pri pojedinim matematičkim zadacima donijeli su sljedeće podatke:

- Zadaci koji se temelje na točnom, jezično određenom izračunu poput „Sedam puta pet je ...“ aktiviraju *lijevi frontalni režanj* dok se u zadacima tipa npr. „Što je veće, 5 ili 7?“ aktiviraju oba *parijetalna područja* (Dehaen i sur., 1999).
- Tijekom oduzimanja aktivira se *lijevi intraparijetalni žlijeb* i to tako da se njegov središnji dio aktivira isključivo kod samog oduzimanja, dok se *stražnja regija* aktivira kod obrade fonološke/jezične komponente zadatka, ali zatim i kod samog oduzimanja. Ova dvojnost je u skladu s teorijom da se obrada broja oslanja na verbalni i neverbalni prikaz (Simon i sur., 2002).
- Loša reprezentacija brojeva u *parijetalnom režnju* povezana je s teškoćama u matematici, a kao posljedica toga javlja se veća aktivacija frontalnih područja (kroz pojačanu pažnju i radno pamćenje) u rješavanju brojevnikih zadataka (Kucian i sur., 2010).
- *Angularna vijuga* sama ne sudjeluje u aritmetičkim zadacima, ali je najbitnija za prizivanje **automatiziranih podataka** (Delazer, 2003), kao npr. kod tablice množenja (pri čemu se aktivira i *područje uz Silvijeju pukotinu i bazalni gangliji*
- kod složenih računskih zadataka prisutna je aktivacija u stražnjim *parijeto-okcipitalnim područjima* koja se povezuju s vizualno-prostornim predodžbama (uključenima u rješavanje složenijih zadataka (Qin i sur., 2003).

Podaci funkcionalne neuromagnetske rezonance dokazuju ispravnost odjeljivanja sustava koji se aktiviraju kada se u zadacima traže točni odgovori u odnosu na sustave koji se aktiviraju kod zadataka s procjenama veličine, odnosno količine.

Točni odgovori zahtijevaju aktivaciju *stražnjeg prefrontalnog korteksa lijeve hemisfere* i *lijevu angularnu vijugu*. Ovo područje preklapa se s onim koje uključuje jezične funkcije.

Zadaci procjene količine pokazuju obostranu aktivnost u *stražnjem parijetalnom režnju obje hemisfere* i preklapaju se s područjima koja su odgovorna za prostornu kogniciju i vizualnu pažnju, odnosno vizualno perceptivne funkcije.

Sagledavajući obilježja funkcioniranja, nalaze fMRI studija, čini se da postoje najmanje tri različita specifična procesa uključena u mentalno računanje i ona dovode do različite mozgovne aktivacije:

- (1) izvršavanje računске operacije koja može biti predstavljena aritmetičkim simbolima (zbrajanje +; oduzimanje -);
- (2) izvršavanje podržavajućih aritmetičkih operacija (npr. pamćenje ili prenošenje kod zbrajanja ili oduzimanja/npr. desetice);
- (3) prizivanje aritmetičkih činjenica (van Harskamp i Cipolotti, 2001).

I klinička, odnosno iskustva stručnog rada govore o mogućim **selektivnim nedostacima** u jednom od tri procesa i mogućnostima da se oni izvode kroz posebne i odvojene podsustave. Medicinski dokazi za to su kliničke slike pacijenata koji imaju mozgovna oštećenja pri čemu npr. ne mogu prepoznati aritmetički simbol, ali mogu ispravno izvesti pogrešnu operaciju (zadatak zbrajanja riješe kao da se radi o množenju; Caramazza i McCloskey, 1987). Mnogo je podataka koji govore o osobama koje imaju problema samo s prizivanjem aritmetičkih činjenica (Pasenti, Seron i van der Linden, 1994), a što uključuje aktivaciju pojedinih dijelova mozga (npr. angularne vijuge), o čemu postoje potvrde u fMRI nalazima (Grabner i sur., 2009).

Sukladno ovim nalazima moguće je da kod specifičnih teškoća u matematici/ diskalkulije problem može biti samo u jednom od podsustava.

Promatrajući neurobiološku osnovu diskalkulije, različite studije pokazale su osobitosti funkcioniranja i nedostatke u svim osobitim područjima vezanima uz matematiku: parijetalnim i frontalnim područjima, posebno intraparijetalnom žlijebu i angularnoj vijuzi kod osoba s diskalkulijom (Butterworth, 2011).

Drugačija mozgovna aktivacija ide u prilog određivanju kvalitativnih razlika djece s diskalkulijom u odnosu na vršnjake urednog razvoja, a kao posljedici toga javljaju se odabiri drugačijih strategija rješavanja, što je vidljivo iz niza podataka (Kucian i sur., 2010).

7.3. Okolinski čimbenici

Dio istraživača koji se bavi teškoćama u matematici i diskalkulijom smatra da problemi u matematici ne moraju nužno biti definirani kao genetski, niti kao biološki utemeljene mozgovne promjene čak i kada govorimo o diskalkuliji (Shalev i Gross – Tsur, 2001). Ostali uzročnici mogu biti nepoticajna okolina (Broman, Bien i Shaughness, 1985), loša poduka, niska inteligencija (Miller i Mercer, 1997) i već spominjana matematička anksioznost (Ashcroft, 1995; Chinn i Ashcroft, 2017).

Uvažavajući isključujuće čimbenike koje daje DSM-V, ovi čimbenici mogu biti razlogom teškoća u matematici, ali ne i diskalkulije.

Premda djeca mogu sama usvajati matematiku, glavninu znanja stječu u školskom okruženju. Tijekom školovanja, kao sastavni dio formalne poduke mogu se javiti i neodgovarajuće metode poučavanja koje mogu biti jedan od razloga zbog kojih će djeca imati teškoća u učenju matematike, posebno aritmetike. Mnogi matematički kurikulumi su empirijski, nerijetko odabrani od strane poučavatelja bez dovoljno dokaza o njihovoj učinkovitosti. Ostali nedostaci mogu biti vezani i uz prevelik broj učenika u razredu kao i preveliku raznolikost učenika s obzirom na niz čimbenika - kognitivne stilove, razinu predznanja, količinu uvježbavanja i slično. Usmjerenost na redovitost i prosječnost, više nego na bilo koje druge aspekte, može rezultirati time da djeca s teškoćama u matematici glavninu svojih znanja stječu u nastavi u redovitim učionicama, a ne temeljem programa koji su usmjereni njihovim individualnim potrebama. Time teškoće mogu prerasti postati značajnije i veće te neka djeca nikada neće biti u prilici pratiti redovni školski program (Miller i Mercer, 1995).

Matematička anksioznost je čimbenik koji zahtijeva psihološki tretman kako bi se oslobodili kapaciteti za matematičko mišljenje i rješavanje matematičkih zadataka (Chinn i Ashcroft, 2017). Anksioznost djeluje na stvaranje slike o sebi, posebno slike o “neuspješnom matematičaru” i stoga može biti razlogom nedostatnih pokušaja u rješavanju matematičkih problema, a onda i manjoj uspješnosti u matematici općenito. Premda se anksioznost dugo vremena smatrala posljedicom neuspjeha u matematici, novija gledišta svrstavaju je u uzročne čimbenike.

8. Procjena u području matematike

Procjena u području matematike je u pravilu usmjerena postavljanju dijagnoze diskalkulije, odnosno teškoća u matematici.

Načini postavljanja dijagnoze znatno se razlikuju, ali općenito imaju dva zajednička aspekta:

- 1) prepoznavanje teškoća u matematici koje utječu na akademski ili svakodnevni život, i
- 2) pokušaj da se isključe neki drugi čimbenici izvan mozgovne disfunkcije koji bi mogli biti odgovorni za teškoće.

Načelno, svaki proces je usmjeren tome da se isključe različiti čimbenici, tako da preostaje objašnjenje teškoća kroz mozgovnu disfunkciju (Wilson, 2016).

Michaelson (2007) u pregledu obilježja diskalkulije smatra da postupak procjene treba započeti s utvrđivanjem nedosljednosti rezultata intelektualnih sposobnosti i rezultata testova matematičkog postignuća (što je moguće kad postoje standardizirani ili normirani matematički testovi). Drugi je korak utvrđivanje značajne razlike (nesrazmjera), obično od dvije godine, između razine školovanja (npr. četvrti razred) i postignuća u matematici (npr. razina znanja drugog razreda).

U našim uvjetima školovanja i mogućnostima provođenja procjene, sam proces obično započinje zbog loših postignuća djeteta u školi i kreće s logopedskom ili s psihološkom procjenom, uz nužno usmjeravanje na procjenu intelektualnog statusa kod psihologa. Time se procjena usmjerava van škole, a što je način kojim se izostavljaju najbitniji podaci. On govori i o razini uključivanja nastavnika u osjetljivost za postojanje teškoća i rješavanje problema.

U zemljama u kojima briga za školovanje svakog pojedinca obvezuje nastavnike na intervenciju u slučaju neuspjeha, značajan dio nastavnika posjeduje znanja koja dozvoljavaju daljnji proces u procjeni, a koji se može temeljiti na promatranju učenikovih ponašanja u matematici i prepoznavanju sljedećih obilježja (prema Michaelson, 2007):

- nerazvijenih strategija za rješavanje problema
- pogrešaka u računanju zbog malog raspona radnog pamćenja
- nedostataka u prizivanju činjenica iz dugoročnog pamćenja
- nedostatne brzine obrade osnovnih matematičkih vještina
- nemogućnosti prepoznavanja komutativnosti za zbrajanje i množenje
- visoke stope pogrešaka, osobito onih koje izgledaju kao površnost
- problema s vizualnim i prostornim funkcioniranjem.

Ovi podaci nisu dostatni niti su jedina osnova za procjenu. Oni također mogu dovesti do pogrešaka u procjeni. Naime neka djeca mogu biti svrstana u skupinu s diskalkulijom, a da zapravo nemaju diskalkuliju i obratno – moguće je da kod neke djece neće biti prepoznata ova obilježja iako ih oni zapravo iskazuju. Poznavanje ovih odrednica ipak može pomoći da se djeca koja su pod sumnjom za diskalkuliju upute na opsežnu procjenu.

Značajan broj zemalja za prepoznavanje diskalkulije kod djece koristi Dyscalculia Screener (Butterworth, 2003). Ovaj najpoznatiji materijal za dijagnosticiranje diskalkulije sastoji se od niza testova i dijagnozu diskalkulije temelji na mjerenju tzv. intuitivnog numeričkog znanja djece od 6 do 14 godina. Ovo znanje proizlazi iz činjenice da ljudi posjeduju biološku predispoziciju za razumijevanje numeričkih koncepata i razvoj osnovnih matematičkih vještina bez formalnog obrazovanja (Ginsburg, 1997). Bitan aspekt za procjenu je brzina kojom ispitanik odgovara na pitanja te se stoga testiranje provodi računalnim programom. Točnost rješavanja zadataka na tri grupe pitanja – prebrojavanje točkica, usporedba brojeva, aritmetičko postignuće, korelira se s vremenskim utroškom kako bi se dobio rezultat.

Dijagnoza se postavlja prema raspodjeli:

Dijagnoza	točkice	Usporedba	Aritmetika
Loše aritmetičke vještine, ali nije diskalkulija	Visoko postignuće	Visoko postignuće	Nisko postignuće
diskalkulija	Nisko postignuće	Nisko postignuće	Srednje postignuće
Uredan rezultat	Visoko postignuće	Visoko postignuće	Visoko postignuće

Butworthov test zahtijeva i računalnu opremljenost te je stoga još uvijek teže dostupan, no mnoge škole koriste ga za provjeru učenika kod kojih postoji sumnja na diskalkuliju.

Kod nas je procjena u području logopedске djelatnosti. Uključuje provjeru postignuća u matematici prema parametrima koji se temelje na činjenici da je diskalkulija jedna od nekoliko specifičnih teškoća /poremećaja učenja. To znači da se uvažavaju tzv. „isključujući“ kriteriji, odnosno da dijete treba imati uredne intelektualne sposobnosti, ne smije imati perceptivne ili motoričke nedostatke, treba biti redovito podučavan, a sredina poticajna za učenje. Tek ukoliko su ovi kriteriji zadovoljeni, procjenjuje se matematička uspješnost ovisno o dobi i razini formalnog obrazovanja.

Zadaci koji se koriste u procjeni mogu uključivati razumijevanje odnosa (prijedlozi, odnosi lijevo-desno, prijenos dimenzija na papir), procjenu količine, usporedbu količina, pridruživanje brojeva količini, čitanje brojeva, zapisivanje brojeva, brojevnju crtu, pojmove vezane uz broj – kao npr. glavni i redni broj, zadatke zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, uporabu matematičkih pravila za računanje, problemske zadatke.

Poseban dio procjene može sadržavati provjeru praktične ili svakodnevne primjene matematike – računanje s vremenom, pravcem, prostorom, novcem i slično.

Svaka procjena treba slijediti kriterije prihvaćene definicije, obilježja na bihevioralnoj razini, temeljna obilježja neuspješnosti u smislu dovoljne razine poduke.

Prema odrednicama RTI (RTI - response to intervention/ odgovor na intervenciju) pristupa specifičnim teškoćama učenja, već značajno prihvaćenima u velikom broju zemalja koje se uspješno bave djecom sa specifičnim teškoćama učenja, dijagnoza diskalkulije moguća je tek ukoliko je provedena intervencija koja nije bila učinkovita, odnosno nije dala rezultate. Kada ni nakon postupaka prilagodbi i postupaka kojima se djetetu pristupa u matematici kroz promjene u načinu poučavanja i učenja nema pomaka u usvajanju matematičkih koncepata i procedura, možemo govoriti o diskalkuliji.

Iskustva u Hrvatskoj, na žalost, nisu vezana uz donošenje dijagnoze temeljem provedenih intervencijskih postupaka. Procjena i sama dijagnoza nerijetko su „jednokratno“ iskustvo sudionika (procjenitelja – logopeda, učenika i nerijetko roditelja) pri čemu niz podataka, koji bi za procjenu bili od koristi (opažanja nastavnika), samom procjenitelju nije dostupan.

Još uvijek ne postoji standardizirani mjerni instrument koji bi dao podatke za odlučivanje o dijagnozi diskalkulije. Ovi podaci bi, uz niz podataka o rezultatima učenika u školi, podataka o funkcioniranju kod kuće u pogledu matematike i o načinima usvajanja znanja općenito (stil učenja) osigurali veću pouzdanost u procjeni i odjeljivanju teškoća u matematici od diskalkulije.

9. Intervencija ili što je moguće činiti kod diskalkulije

Intervencija mora uvažavati činjenicu da je zapravo svaki slučaj diskalkulije jedinstven. Uz to, podaci niza istraživanja pokazuju da je aritmetička kognicija sačinjena od više komponenti i moguće je da dijete pokaže razne kombinacije neslaganja tih komponenti.

Povijest provođenja intervencija kod nedostatnih matematička znanja seže još u početak prošlog stoljeća (dvadesete godine prošlog stoljeća) i temelji se na uvažavanju specifičnih potreba za podučavanjem (Dowker i Morris, 2015). Takvo uvažavanje teško je postići uz saznanja da gotovo posvuda u svijetu razredi rastu s obzirom na broj učenika i s obzirom na premali broj educiranih stručnjaka koji bi mogli provoditi intervenciju u razredu.

Ovi razlozi, uz neke druge, pridonijeli su da je sve više individualiziranih intervencija, a što posebno vrijedi u sredinama koje nude ovakve mogućnosti (kao npr. osnovne škole u Velikoj Britaniji, Dowker, 2009).

Intenzivna intervencija sve je češće model koji se nastoji primijeniti kada postoje matematičke teškoće ili diskalkulija. Najpoznatija takva intervencija je Mathematics Recovery. Program je izvorno razvijen u Australiji (Wiley, Holiday i Martland, 2007) i započinje procjenom i zatim intervencijom u trajanju od pola sata individualnog rada svaki dan, do razine od 60 sati. Uključuje različite komponente aritmetike.

Vrlo sličan program - Numbers Count razvijen je u Velikoj Britaniji (Torgerson i sur., 2011).

Ovi programi osiguravaju napredovanje djece koja dugoročno pokazuju zaostajanje i niz nedostatnosti te zbog svojih teškoća uzrokuju značajne gubitke i troškove za školski, ali nerijetko, i druge sustave.

Program Number Race osmišljen je da se poboljša točnost reprezentacija količine (Wilson, Revkin i Cohen, 2006). Igra se sastoji u odabiru veće količine uz pružanje povratne informacije o ispravnom odgovoru.

Graphogame slijedi sličnu logiku i od pojedinaca zahtijeva usporedbu skupa objekata. Usmjeren je na točke, brojke i povezivanje s brojevima, odnosno znamenkama. Oba programa su usmjerena na kognitivne procese ključne za razvoj matematičkih vještina.

Cijeli je niz podataka koji pokazuju da je multi-senzorički pristup aritmetici kod djece s nedostatnim osjećajem za broj, odnosno djece s diskalkulijom, učinkovit jer otvara mogućnosti da se kroz konkretne manipulacije, gledanje, dodir, pokret i razgovor stvaraju predodžbe važne za matematičke operacije.

To potvrđuju i neke meta-analize intervencijskih postupaka, a poznato je i iz iskustava s drugim specifičnim teškoćama učenja.

Meta-analiza koju su proveli Kroesbergen i van Luit (2003) na 58 intervencijskih studija među učenicima osnovnih škola pokazala je:

- većina intervencija bavi se osnovnim numeričkim vještinama
- intervencije za promicanje osnovnih numeričkih vještina bili su učinkovitije od intervencija za promicanje predvještina i / ili strategija rješavanja problema
- kraće intervencije su učinkovitije od dužih (trajanje intervencije u rasponu od jednog tjedna do jedne školske godine)
- direktno poučavanje (osobe) je učinkovitije od onih računalnih (posredujućih).

Daljnje meta-analize pokazale su da su individualizirane intervencije učinkovite za poboljšanje računanja. Intervencije koje se temelje na razumijevanju strategija mnogo su učinkovitije od onih u kojima subjekt pasivno komunicira (podučavanje umjesto direktnih instrukcija).

Posebno učinkoviti postupci su:

- praktično ponavljanje
- odjeljivanje tema u zasebne cjeline
- rad u malim, interaktivnim skupinama
- upotreba ključeva u strateškom učenju.

Trott (2003) je istražujući učinkovitost intervencijskih postupaka oblikovao listu strategija koje pomažu onima koji imaju diskalkuliju. On ističe tri dimenzije unutar kojih se odvijaju podrška i pomoć:

Poboljšanje vještine čitanja

- Podijeliti velike cjeline, odnosno dijelove teksta na zasebne stranice na kojima su cjeline i označavati dijelove posebnim oznakama, npr. •
- Koristiti sans serif font (kao npr. Arial ili Tahoma), koji je lakši za čitanje osoba s diskalkulijom
- Ne poravnavati tekst jer dodatni razmaci otežavaju čitanje
- Koristiti obojani papir kako bi se smanjio odsjaj bijelog papira i kontrast s crnim tiskom, a što je često problem za studente koji imaju poteškoća s vizualnom percepcijom.

Poboljšanje vještine rješavanja matematičkih problema

- Kopiranje matematičke knjige, koju je teško čitati zbog ubačenih dijagrama, tablica i grafikona, pri čemu se značajni dijelovi trebaju pažljivo poredati
- Odjeljivanje problema u više manjih koraka
- Uporaba čitača koji označava liniju rješavanja problema i potiskuje druge dijelove u pozadinu
- Uporaba boja ili markera za označavanje raznih dijelova pitanja
- Uporaba boje u proračunskim tablicama za razgraničavanje različitih stupaca i retka
- Grafičko uređivanje izlaznih tablica statističkih analiza, tako da se student može usredotočiti na relevantne dijelove.

Opće napomene

- Dopuniti nepotpune bilješke
- Pomoću velikih zidnih plakata osigurati prisjećanje na temeljne koncepte koje nije lako prizvati iz pamćenja
- Koristiti sustav kartica za pomoć u prisjećanju
- Osigurati dijagrame toka ili dijagrame stabla za razjašnjenje procedura
- Osigurati umne mape
- Oslanjati se na tipične strategije za uključivanje vizualnoga u većoj mjeri
- Savladavanje lekcija vlastitim tempom
- Savladavanje vještina organizacije, studiranja i upravljanja vremenom
- Usredotočiti se na pregled/reviziju prije ispita.

9.1. Tretman kod diskalkulije

Zakonske odrednice vezane uz obrazovanje osoba sa specifičnim teškoćama učenja u Hrvatskoj daju mogućnosti školovanja prema redovnom programu uključujući individualizirane postupke u nastavi, a što treba rezultirati prilagodbama metoda i postupaka rada.

Osmišljavanje postupaka u domeni je rada nastavnika i stručnog suradnika logopeda. Smjernice za oblikovanje tog programa proizlaze iz spoznaja o diskalkuliji i znanja o metodama prilagodbe za učenike sa specifičnim teškoćama učenja koje uključuju sadržajne i grafičke prilagodbe.

Tretman se temeljno treba usmjeriti na tri područja: broj (rano brojanje), računanje i problemski zadaci.

Kod prilagodbi za učenike s diskalkulijom važno je slijediti principe:

- pojašnjavanja riječi ili procedura koje mogu biti nejasne
- detaljnog objašnjavanja postupaka pri čemu je potrebno svaki dio jezično „prevesti“ u shvatljive oblike
- dijeljenja cjelina u manje dijelove – složene zadatke jasno odijeliti u „podzadatke“
- jasnog poretka procedura kod složenijih zadataka uz primjere načina rješavanja
- označavanja pojedinih važnih dijelova isticanjem (podebljanja, boja...)
- oslanjanja na multi-senzoričke principe (vizualna, auditivna, taktilna iskustva).

U individualnom radu potrebno je još i:

- pratiti način kako učenik rješava problem
- analizirati vrstu greške – greška je informativna u smislu razumijevanja uzroka njena nastanka
- razgovarati i raspravljati s učenikom o načinu pristupa pri rješavanju matematičkog zadatka
- odrediti kognitivni stil učenja matematike za pojedinca – uvažavati da svatko ima svoj osobiti način rješavanja matematičkih zadataka
- uskladiti postupke i pristup s kognitivnim stilom učenika
- razvijati metakognitivne strategije na način: kako znam to što znam, što sam činio uspješno...
- oslanjati se na sve osjetne modalitete za tumačenje suštine zadataka
- koristiti strategije koje su uspješne, premda razinom ne odgovaraju kronološkoj i obrazovnoj dobi, u svrhu postizanja uspjeha (npr. duže korištenje prstiju pri računanju)
- graditi samopouzdanje u pogledu pristupanja rješavanju zadataka – strategija „nema odustajanja bez pokušaja“.

Individualni rad treba biti usmjeren na poboljšanje prizivanja činjenica i proceduralnu matematiku (npr. računanje s višeznamenkastim brojevima), te uključivati izravna objašnjenja, slikovne ili konkretne reprezentacije, verbalno prizivanje s postupnim povećavanjem činjenica, intenzivno vremensko ograničenje ili miješane setove problema kao i zbirne preglede prethodno usvojenih vještina te strategija (Butterworth, 2005).

Niz istraživanja pokazuje da je uspjeh u matematici u odrasloj dobi snažno određen količinom ponavljanja i vježbi u školskoj dobi (Bahrick i sur., 2013). U skladu s time, osiguravanje dovoljne količine ponavljanja i vježbi kako tijekom individualnih tretmana ili kroz intervencijske postupke, dobar je put za veću uspješnost.

Djeci s diskalkulijom treba osigurati dovoljno prilika za vježbu i posebna uvježbavanja koja će osigurati postizanje ciljeva (prema Coddington, Volpe i Poncy, 2017). Prilike trebaju uključivati:

- korištenje materijala koji odgovaraju razini učenikova znanja, ali i obrazovnoj razini
- kratka, ali česta uvježbavanja
- materijal koji je usustavljen i grupiran u male setove i usklađen s učenikovim napretkom.

Uvježbavanje se može odvijati kroz četiri različite aktivnosti: vođeno vježbanje, *dril*, vježbanje i cjeloviti pregled.

Vođeno vježbanje je učestali oblik uvježbavanja kod učenja novih koncepata i podrazumijeva da osoba koja vodi predočava aktivnosti korak po korak, pri čemu uključuje učenika koji istovremeno može dovršavati aktivnost. Voditelj (npr. logoped) za vrijeme vođenja treba verbalizirati aktivnost i očekivati da učenik glasno razmišlja o aktivnostima.

Dril – je uvježbavanje individualnih vještina i koncepata u izdvojenim uvjetima (npr. rad s karticama za uvježbavanje) s neposrednom povratnom informacijom (npr. na poledini kartice) s ciljem smanjivanja grešaka. Dril je bitan u stjecanju vještina i može dovesti to fluentnosti (tečnosti, automatizacije) jer vodi učenika do povezivanja točno određenog problema i odgovora (Coddington i sur., 2011).

Vježbanje je primjena novostečenih znanja, vještina i koncepata u kontekstu zadatka koji uključuje prethodno naučeni materijal. Ono se odvija kroz npr. višestruke tipove problemskih zadataka ili miješanje činjenica / iz zbrajanja, množenja, znanja zagrada i sl. Ovaj oblik vodi rješavanju, kao i lakšem i bržem prizivanju činjenica te generalizaciji naučenog.

Cjeloviti pregled može imati više različitih oblika, a svrha je pregleda da se prethodne manje cjeline i koncepti kombiniraju kako bi se poticalo prizivanje, generalizacija vještina i koncepata. Cjeloviti pregled može se činiti i na početku svakog tretmana u odnosu na rezultate prethodnih tretmana.

Tijekom tretmana bitno je poticati učenikovo verbaliziranje matematičkih sadržaja, vizualizaciju matematičkih koncepata i procedura te jačati motivaciju, želju i potrebu da se zadatak riješi.

Literatura

1. Ackerman, P. T.; Dykman, R. A. (1996) The speed factor and learning disabilities: the toll of slowness in adolescents. *Dyslexia*. Vol. 2, 1, 1-22.
2. Adler, B. (2001) What is dyscalculia. Kognitivt Centrum Sweden. Sweden. www.dyskalkyli.nu;
www.dyscalculiainfo.org.
3. Alarcon, M.; Defries, J.C, Light J. G.; Pennington B.F. (1997) A twin study of mathematics disability. *Journal of Learning Disabilities*, Vol. 30, 617-23.
4. Allen, F.B. (1988) Language and the learning of mathematics. A speech delivered at the NCTM annual meeting, Chicago, April 1988. <http://www.mathematicallycorrect.com/allen4.htm>
5. Ashcraft M. H. (1995) Cognitive psychology and simple arithmetic: A review and summary of new directions. *Mathematical Cognition*, Vol. 1, 3-34.
6. Baddeley, A. D. (1986) Working memory. . London: Oxford University Press.
7. Badian, N. A. (1983) Dyscalculia and nonverbal disorders of learning. In H. R. Myklebust (Ed.), *Progress in learning disabilities*, Vol. 5, New York: Stratton. 235–264.
8. Bahrack, H. P.; Hall, L. K.; Baker, M. K. (2013) *Life – Span Maintenance of Knowledge*. NY: Psychology Press, Taylor & Francis LLC.
9. Baroody, A.J.; Ginsburg, H.P. (1986) The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In: J. Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge of mathematic*. Hillsdale: Erlbaum. 75-112.
10. Broman S, Bien E, Shaughness, P. (1985) *Low achieving children: The first seven years*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1985.
11. Butterworth, B., Granà, A., Piazza, M., Girelli, L., Price, C., & Skuse, D. (1999) Language and the origins of number skills: karyotypic differences in Turner’s syndrome. *Brain & Language*, 69, 486–488.
12. Butterworth, B. (2003) *Dyscalculia Screener*. London, UK: nferNelson Publishing Company Limited.
13. Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, Vol. 46, 3–18.
14. Butterworth, B. (2005) Developmental dyscalculia. In: J. Campbell (Ed.) *Handbook of Mathematical Cognition*. New York: Psychology Press. 455-467.
15. Butterworth, B.; Varma, S.; Laurillard, D. (2011) Dyscalculia: From Brain to Education. *Science*, Vol. 332. 1049-1053.
16. Chinn, S. (2003) Multiplication table facts... a quest. *Dyslexia Review*, Vol. 15, 1, 18-21.
17. Chinn, C.J. (2012). *The trouble with Maths: A practical guide to help learners with numeracy difficulties*, 2nd edition. London: Routledge.
18. Chinn, S. (ed.) (2015) *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties*. London, New York: Routledge, Taylor i Francis Group.
19. Chinn, S.; Ashcroft, R. (2017) *Mathematics for Dyslexics and Dyscalculics. A Teaching Handbook*. Chishester, UK: John Wiley & Sohns.
20. Cholmsky, P. (2014) From acquisition to automaticity: The Reflex solution for math fact mastery. https://www.reflexmath.com/assets/doc/Reflex_White_Paper.pdf

21. Coddling, R.S., Burns, M.K., & Lukito, G. (2011). Meta-analysis of mathematic basic-fact fluency interventions: A component analysis. *Learning Disabilities Research & Practice*, Vol. 26, 36-47.
22. Coddling, R. S.; Volpe, R. J.; Poncy, B. C. (2017) *Effective Math Interventions. A Guide to Improving Whole-Number Knowledge*. NY, London: The Guilford Press.
23. Cummins, D. D. (1991) Childrens' Interpretations of Arithmetic Word Problems. *Cognition and Instruction*. Vol. 8 (3), 261-289.
24. Čekrlija, B. (2000) *Vremeplovom kroz matematiku*. Banja Luka: Grafomark.
25. Dehaene, S.; Piazza, M.; Pinel. P. (2003) Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*. Vol. 20 (3) 487–506.
26. Dehaene, S.; Spelke, E.; Pinel, P.; Stanescu R.; Tsivkin S. (1999) Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, Vol. 284, 970–974.
27. Delazer, M. (2003). Neuropsychological findings on conceptual knowledge in arithmetic. In A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.) *The development of arithmetic concepts and skills: recent research and theory*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale. 385-408.
28. DeWind, N.K.; Brannon, E.M. (2012) Malleability of the approximate number system: Effects of feedback and training. *Frontiers in human neuroscience*.
www.frontiersin.org/human_neuroscience/10.3389/fnhum.2012.00068
29. DSM-V (2014) *Dijagnostički i statistički priručnik za duševne bolesti*. Američka psihijatrijska udruga. Ur. hrvatskog izdanja: V. Jukić, G. Arbanas. Jastrebarsko: Slap.
30. Dowker, A. (2005). *Individual Differences in Arithmetical Abilities: Implications for Psychology, Neuroscience and Education*. New York, NY: Psychology Press. doi: 10.4324/9780203324899
31. Dowker, A. (2008). Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental Science*, Vol. 11, 650–654. doi: 10.1111/j.1467-7687.2008.00713.x
32. Dowker, A. (2009) *What works for children with mathematical difficulties? The effectiveness of intervention schemes*. London: DCSF.
33. Dowker, A.; Morris, P. (2015) Targeted interventions for children with difficulties in learning mathematics. In: S. Chinn, (Ed.) *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties*. London, New York: Routledge, Taylor i Francis Group.
34. Esty, W. W. (2017) *The Language of Mathematics*. 19th edition. <http://estymath.com/>
35. Fawcett, A. J.; Nicholson, r. (1999) Performance of dyslexic children on cerebellar and cognitive tasks. *Journal of Motor Behavior*, Vol. 31, 68-78.
36. Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. S. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, Vol. 8, 307–314. doi:10.1016/j.tics.2004.05.002
37. Fuson, K. C. (1990). Issues in place-value and multidigit addition and subtraction learning and teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 21, 273-280.
38. Gafoor, A. K.; Sarabi, M. K. (2015) *Need for Equipping Student Teachers with Language of Mathematics*.
<http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED560111.pdf>
39. Gagne, R. M. (1983) Some issues in the psychology of mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematic Education*. Vol. 14, 275-282.

40. Gathercole, S.; Alloway, T. P. (2008) *Working Memory and Learning. A Practical Guide for Teachers*. London. Sage.
41. Geary, D. C. (2000) From infancy to adulthood: the development of numerical abilities. *European Child & Adolescent Psychiatry*, Vol. 9, II, 11-16.
42. Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 236 – 263.
43. David C. Geary (2003) *Learning Disabilities in Arithmetic: Problem-Solving Differences and Cognitive Deficits*. In: L. Swanson, K. R. Harris, S. Graham: *Handbook of Learning Disabilities*. New York: The Guilford Press. 199-213.
44. Geary, D. C. (2004) Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*. Vol. 37 (1), 4-15.
45. Geary, D. C. (2005) Role of Cognitive Theory in the Study of Learning Disability in Mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, Vol. 38, 4, 305–307.
46. Geary, D. C.; Hoard, M.K.; Bailey, D. H: (2011) How SLD manifests in mathematics. In: D. P. Flanagan, i V. C. Alfonso (eds) *Exentials of Specific Learning Disability Identification*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sohns. 43-65.
47. Geary, D. C. (2013) *Mathematical Disabilities: What We Know and Don't know*. <http://www.lonline.org/article/5881> pristupljeno studeni 2016.
48. Gelman, R. i Meck, E. (1986). The notion of principle: The Case of counting. In: J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge of mathenatic*. Hillsdale: Erlbaum. 29 – 57.
49. Ginsburg H.P. (1997) Mathematics learning disabilities: a view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities*, Vol. 30 (1) 20-33.
50. Grabner, R.H.; Ansari, D.; Koschutnig, K.; Reishofer, G.; Ebner, F.; Neuper, C. (2009) To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. *Neuropsychologia*, Vol. 47, 604–608.
51. Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, Vol. 5, (1), 49-101.
52. Gross-Tsur, V., Manor, O., & Shalev, R. S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine and Child Neurology*, 38, 25–33.
53. Hamak, S.; Astill, J.; Preclaro, H. R (2015) The acquisition of mathematics skills of Filipino children with learning difficulties. Issues and challenges. In: S. Chinn, (Ed.) *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties*. London i New York: Routledge, Taylor i Francis Group.
54. Halberda, J., Mazocco, M.; Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, Vol. 455, 665-668.
55. Hattie, J. (2009) *Visible Learning*. Abingdon: Routledge.

56. Hoffman, B. (2010) "I think I can, but I'm afraid to try" the role of self-efficacy beliefs and mathematics anxiety in mathematics problem-solving efficiency. *Learning and Individual Differences*. Vol. 20 (3) 276-283.
57. Houssart, J. (2005) Count me out: Task refusal in primary mathematics. In: Watson, A.; Houssart, J. Roaf, C. (Ed.) *Supporting Mathematical Thinking*. London: David Fulton.
58. Jonassen, D. H., Howland, J., Moore, J.; Marra, R. M. (2003) *Learning to solve problems with technology: A constructivist perspective* Pearson Education Inc.
59. Jovanović, G.; Jovanović, Z.; Banković-Gajić, J.; Nikolić, A.; Svetozarević, S.; Ignjatović-Ristić, D. (2013) The frequency of dyscalculia among primary school children. *Psychiatria Danubina*, 2013; Vol. 25 (2), 170-174.
60. Kaufmann, L.; Mazzocco, M. M., Dowker, A.; von Aster, M.; Göbel, S. M. ; Grabner, R. H.; Henik, A.; Jordan, N. C.; Karmiloff-Smith, A. D.; Kucian, K.; Rubinsten, O.; Szucs, D.; Shalev, R.; Nuerk, H. C. (2013) Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, Vol. 4, Article 516. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516>.
61. Klein, A i Starkey, P. (1987). The origins and development of numerical cognition: A comparative analysis. In: J.A Sloboda; D. Rogers, (Eds.) *Cognitive processes in mathematics*. Oxford: Clarendon Press.
62. Kosc L. (1974) Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*. Vol. 7, 46-59.
63. Kroesbergen E.; van Luit J.E.H. (2003) : *Mathematics Intervention for Children with Special Educational Needs*. Remedial and Special Education, Vol. 24, 97–114.
64. Kucian, K.; Loenneker, T.; Martin, E.; von Aster, M: (2010) Non-Symbolic Numerical Distance Effect in Children With and Without Developmental Dyscalculia: A Parametric fMRI Study. *Journal of Developmental Neuropsychology*. Volume 36 (6) 741-762.
65. Kumar, S. P.; Raja, B. W. D. (2009) Will dyscalculics be benefitted by dint of visual learning? *I-manager's Journal of Educational Psychology*. Vol. 3 (2). 27-32.
66. Lenček, M.; Peretić, M. (2015) ANS (Approximate Number System) – što nam govori o matematici kod predškolaca. V. kongres logopeda Hrvatske. Usmeno izlaganje; Osijek, 24.-26. 9. 2015.
67. Lenček, M., Peretić, M., Arapović, D. (2010). Od "matematika mi ne ide" do diskalkulije. Zbornik radova *Perspektive cjeloživotnog obrazovanja učitelja i odgojitelja*. Ur. R. Bacalja. Zadar, Sveučilište u Zadru, Odjel za izobrazbu učitelja. 240-257.
68. Libertus, M. E.; Brennan, E. M. (2010) Stable individual differences in number discrimination in infancy. *Developmental Science*. Vol.13 (6), 900–906.
69. Liebeck, P. (1995) *Kako djeca uče matematiku*. Zagreb: Educa.
70. Lyons, M.L.; Beilock, S. L. (2012) When math hurts: Math anxiety predicts pain network activation in anticipation of doing math. *PLoS ONE*, Vol 7 (10).
71. Madsen, A. L.; Smith, P.; Lanier, P. (1995) Does Conceptually Oriented Instruction Enhance Computational Competence?. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 17 (4) 42-64.
72. Mammarella, I. C.; Lucangeli, D.; Cornoldi, C. (2010) Spatial Working Memory and Arithmetic Deficits in Children With Nonverbal Learning Difficulties. *Journal of Learning Disabilities* 43(5) 455–468.
73. Mazzocco, M. M. M.; Feigenson, L. Halberda, J. (2011) Impaired Acuity of the Approximate Number System Underlies Mathematical Learning Disability (Dyscalculia). *Child Development*, Vol. 82 (4), 1224–1237

74. McCloskey, M.; Caramazza, A. (1987) Cognitive mechanisms in normal and impaired number processing. In: Deloche, G.; Seron, X. (Eds): *Mathematical disabilities: A cognitive neuropsychological perspective*. Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 201-219.
75. Michaelson, M. T. (2007) An overview of dyscalculia. Methods for ascertaining and accommodating dyscalculic children in the classroom. *Australian Mathematics Teacher*, Vol. 63 (3), 17-22.
76. Miller, S.P, Mercer C.D. (1997) Educational aspects of mathematics disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, Vol. 30, 47-56.
77. Molko, N.; Cachia, A.; Riviere, D.; Mangin, J. F.; Bruandet, M.; LeBihan, D.; Cohen, L.; Dehaene, S. (2004) Brain Anatomy in Turner Syndrome: Evidence for Impaired Social and Spatial-Numerical Networks. *Cerebral Cortex*, Vol 14 (8), 840-850.
78. Morsanyi, K., Szűcs, D. (2015) The link between mathematics and logical reasoning. Implications for research and education. In: Chinn, S. (Ed.) *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties*. London, New York: Routledge, Taylor & Francis Group.
79. Mulligan, J. (2015) Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematic Education*. Vol 47 (3). 511-517.
80. Orton, A. (1987) *Learning mathematics: Issues, theory and classroom practice*. London: Cassell.
81. Ostad, S. A. (1998b). Comorbidity between mathematics and spelling difficulties. *Log Phon Vovol*, 23, 145–154.
82. Peard, R. (2010) Dyscalculia: What is its prevalence? Research evidence from case studies. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, Vol. 8, 106-113.
83. Pesenti, M.; Seron, X.; Van Der Linden, M. (1994) Selective Impairment as Evidence for Mental Organisation of Arithmetical Facts: BB, A Case of Preserved Subtraction? *Cortex*, Vol. 30 (4), 661–671.
84. Piazza, M.; Facoetti, A.; Trussardi, A. N.; Berteletti, I.; Conte, S.; Lucangeli, D.; Dehaene, S.; Zorzi, M. (2010) Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, Vol. 116, 33–41.
85. Piazza, M.; Izard, V. (2010) How Humans Count: Numerosity and the Parietal Cortex. *The Neuroscientist*, Vol. 15 (3), 261-273.
86. Qin, J.; Carter, C. S.; Silk, E. M.; Stenger, V. A.; Fissell, K.; Goode, A.; Anderson, J. R. (2004) The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. Vol. 101 (15), 5686 –5691.
87. Ramaa S. and I.P. Gowramma (2002) A systematic procedure for identifying and classifying children with dyscalculia among primary school children in India. *Dyslexia*, Vol 8, 67 -85.
88. Rittle-Johnson, B.; Siegler, R.S. (1998) The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review of the literature. In: C. Donlan (Ed.) *The development of mathematical skills*. Hove, East Sussex England: Psychology Press. 75-110.
89. Shalev RS, Manor O, Kerem B, et al. Developmental dyscalculia is a familial learning disability. *Journal of Learning Disabilities*. Vol. 34, 59-65.
90. Sharma, M. C. (1989) *How children learn mathematics: Professor Mahesh Sharma, in interview with Bill Domoney*. London, England: Oxford Polytechnic, School of Education. 90 min. Educational Methods Unit. Videocassette. www.dyscalculia.org. Pristupljeno studeni, 2016.

91. Sharma, M. C. (2001.). Matematika bez suza – kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike. Buševac: Ostvarenje.
92. Sigmundsson, H., Anholt, S. K., and Talcott, J. B. (2010). Are poor mathematics skills associated with visual deficits in temporal processing? *Neurosci. Lett.* 22, 248–250.
93. Simon O, Mangin J-F, Cohen L, et al: Topographical layout of hand, eye, calculation, and language-related areas in the human parietal lobe. *Neuron*, Vol. 33, 475–487.
94. Stickney, E. M.; Lindsay, M. S.; Sharp, B.; Kenyon, A. S. (2012) Technology-Enhanced Assessment of Math Fact Automaticity Patterns of Performance for Low- and Typically Achieving Students . *Assessment for Effective Intervention*. Vol 37 (2), 39-46.
95. Swanson, H. L.; Cooney, J. B.; McNamara, J. K. (1991) Learning Disabilities and Memory. In: Wong, B. (Ed.): *Learning about Learning Disabilities*. 3rd ed. London: Elsevier Academic Press. 41-80.
96. Swanson, H. L.; Beebe-Frankenberger, M. (2004) The Relationship Between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties. *Journal of Educational Psychology*, Vol. 96, (3) 471–491.
97. Siegler, R. S. (1987) The Perils of Averaging Data over Strategies: An Example From Children's Addition. *Journal of Experimental Psychology*. Vol 116 (3), 250-264.
98. Sinclair, H.; Sinclair, A. (1986) Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. In: Hiebert, J. (ed.) *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, N.J.: Erlbaum, Hillsdale.
99. Torgerson, C. J.; Wiggins, A.; Torgerson, D. J.; Ainsworth, H.; Barmby, P.; Hewitt, C.; Tymms, P. (2011) *Every Child Counts: The Independent Evaluation Executive Summary*. London: Department for Education (DfE).
100. Trott, C. (2003). Mathematics support for dyslexic students. *MSOR Connections*, 3(4), 17–20.
101. Van Harskamp, N. J., & Cipolotti, L. (2001). Selective impairments for addition, subtraction and multiplication. Implications for the organisation of arithmetical facts. *Cortex*, Vol. 37, 363–88.
102. Van Luit, J.E.H., Van de Rijt, B.A.M., & Pennings, A. H. (1994) [Utrecht Early Mathematical Competence Scales. Doetinchem, the Netherlands: Gravian
103. Vasta, R., Haith, M. M. i Miller, S. A. (1998) *Dječja psihologija*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
104. Vlahović-Štetić, V., Nadilo, M., Pavlin-Bernardić, N. (2006.). Brojenje: stječemo li prije načela ili vještinu. *Suvremena psihologija*, 9 (1/2006.), 21-34.
105. Vlahović - Štetić, V., Vizek Vidović, V. (1998) *Kladim se da možeš...- psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*. Zagreb: Udruga roditelja Korak po korak.
106. Vlahović-Štetić, V. (2009). Matematika za život. *Dijete, škola, obitelj*, Vol. 24, 2-5.
107. Von Aster, M., Holger Lorenz, J. (2013). *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
108. Whalen, J., Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1999). Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, Vol. 10, 130–137.
109. Willey, R.; Holliday, A.; Martland, J. (2007) Achieving new heights in Cumbria: raising standards through Mathematics Recovery. *Educational and Child Psychology*, Vol. 24, 108-118.
110. Wilson, A. J. (2016) *Dyscalculia Primer and Resource Guide*.
<http://www.oecd.org/edu/ceri/dyscalculiaprimerandresourceguide.htm>

111. Young, C.B., Wu, S. S.; Menon, V. (2012) The Neurodevelopmental Basis of Math Anxiety. *Psychological science* 23.5: 492–501.